Idag Kvadratiska former 7.2

Kvadratisk form

Funktioner av typen

$$f(x) = f(x_1, x_2) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$$

är viktiga inom optimering, mekanik, osv. Ofta vill man minimera eller maximera dem.

Obs: f innehåller bara kvadriska termer.

Typiskt för energi, kostnad osv.

Ex Bestäm maximum och minimum av

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3^2.$$

Kvadratkomplettera:

$$x_1 + 3x_1x_2 = \left(x_1 + \tfrac{3}{2}x_2\right)^2 - \tfrac{9}{4}x_2^2$$

så att

$$f(x) = \left(x_1 + \tfrac{3}{2}x_2\right)^2 + \tfrac{7}{4}x_2^2 + x_3^2$$

så $f(x) \geq 0$ och $f(0) = 0$.

Alltså: $\min f = 0$. Dessutom $\max f = \infty$ eftersom alla termer ≥ 0.

Ex Om vi antar bivillkoret $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, dvs maximerar/minimerar över sfären, så fås $\max f = 4.62$, $\min f = 0{,}38$. Vi ska visa detta.

Skriv f på matrisform:

$$f(x) = x^T A x, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kontroll: $x^T A x = [x_1\, x_2\, x_3] \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$

$$= [x_1\, x_2\, x_3] \begin{bmatrix} x_1 + \frac{3}{2}x_2 \\ 3/2 x_1 + 4x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1^2 + \underbrace{\tfrac{3}{2}x_1x_2 + \tfrac{3}{2}x_2x_1}_{=3x_1x_2} + 4x_2^2 + x_3^2.$$

Vi delar upp $3x_1x_2 = \frac{3}{2}x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2x_1$ för att få en symmetrisk matris.

För allmän kvadratisk funktion:

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + $$
$$+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + $$
$$+ \dots + a_{nn}x_n^2$$

får vi

$$f(x) = x^T A x \text{ med } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Def En kvadratisk form är en funktion $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som ges av $Q(x) = x^T A x$ med en symmetrisk matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Det underlättar att man kan byta koordinater $x = Py$ så att man inte får några korstermer $y_i y_j$, $i \neq j$.

Sats 4 (Satsen om principalaxlar)
Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vara symmetrisk. Då finns ortogonal matris P så att variabeltransformationen $x = Py$ leder

till $y^T D y = x^T A x$ där D är diagonal.

<u>Bevis</u> Vi vet att A är ortogonalt diagonaliserbar, $A = PDP^T$.

Sätt $x = Py$, $y = P^T x$, så fås

$$x^T A x = x^T (PDP^T) x = (Px)^T D (P^T x) =$$

$$= y^T D y. \qquad \square$$

<u>Ex</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)(4-\lambda) - \frac{9}{4}\right) =$$

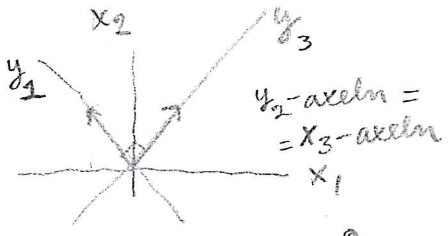
$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4}\right) = (1-\lambda)\left(\left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{7}{4}\right) =$$

$$= (1-\lambda)\left(\left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{18}{4}\right) = (1-\lambda)\left(\lambda - \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{5-3\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5+3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}38 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4{,}62 \end{bmatrix}$$

$$P \approx \begin{bmatrix} -0{,}92 & 0 & 0{,}38 \\ 0{,}38 & 0 & 0{,}92 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$f(x) = x^T A x = y^T D y = 0{,}38\, y_1^2 + y_2^2 + 4{,}6\, y_3^2$$

Vi har $\|x\|^2 = x^T x = (Py)^T (Py) = y^T P^T P y =$

$= y^T I y = y^T y = \|y\|^2$, dvs $\|x\| = \|Py\| = \|y\|$

så att $\displaystyle \max_{\|x\|=1} f(x) = \max_{\|x\|=1} x^T A x = \max_{\|y\|=1} y^T D y \approx 4{,}62$

fås då $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

På samma vis:

$\displaystyle \min_{\|x\|=1} f(x) = 0{,}38$ fås då $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dvs max och min över sfären $\|x\| = 1$ ges av λ_{max} resp. λ_{min}.

Axlarna y_1, y_2, y_3 kallas principalaxlarna för A.

De bildar ett ortogonalt koordinatsystem.

(Ibland: huvudaxlarna, t.ex. för spänningstensorn Σ.)

Det blir enklare att se vilka värden som $Q(x)$ tar om man använder detta koordinatsystem:

$$Q(x) = x^T A x = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

inga korstermer $y_i y_j$, $i \neq j$.

Def En kvadratisk form Q är

1. positivt definit om $Q(x) > 0$ $\forall x \neq 0$
2. negativt definit om $Q(x) < 0$ $\forall x \neq 0$
3. indefinit om $Q(x)$ tar både positiva och negativa värden

Om $Q(x) \geq 0$ $\forall x$ säger vi positivt semidefinit, och negativt semidefinit om $Q(x) \leq 0$ $\forall x$.

Obs: $Q(0) = 0$.

Se bilder på sid 423.

Sats 5 Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vara symmetrisk

Då är $Q(x) = x^T A x$

1. pos. definit omm alla eg. värden $\lambda_i > 0$.
2. neg. definit omm alla eg. värden $\lambda_i < 0$.
3. indefinit omm A har både $\lambda_i < 0$ och $\lambda_j > 0$.

Bevis $Q(x) = x^T A x = y^T D y =$

$= \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$. Eftersom

alla $y_i^2 > 0$ då $x = Py \neq 0$ så

kontrolleras tecknet på $Q(x)$ av tecknen på egenvärdena så som satsen säger. $\square$.

Obs: strängt tecken krävs.

Om t.ex. alla $\lambda_j \geq 0$ så är Q endast positivt semidefinit

$$Q(x) \geq 0 \quad \forall x.$$