

Idag Repetition

Tentamens upplägg: se "Gamla tentor" på kursens hemsida.

Linjärt ekvationssystem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Vektor- och matrisform:

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b, \quad a_i \in \mathbb{R}^m$$

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Radreduktion:

$$[A \ b] \sim [\tilde{A} \ \tilde{b}] \quad \tilde{A} = E_p \dots E_1 A$$

↑
reducerad trappstegsmatrix

Bundna variabler ← pivotpositioner
 Fria variabler ← icke-pivotpositioner
 Konsistent om: * pivotposition i varje rad
 * $b \in \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$

$$\text{Col}(A) = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$$

$$\text{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} \subset \mathbb{R}^n$$

$$\text{Nul}(A) = \{0\} \Leftrightarrow \{a_1, \dots, a_n\} \text{ linjärt ober.}$$

$$c_1 a_1 + \dots + c_n a_n = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$

Linjär avbildning: $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $x \mapsto T(x)$

$$\text{Värderum} = \{Tx : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$$

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \text{ bevarar linj. komb.}$$

Matrix för T: $T(x) = Ax$

$$\text{med } A = [T(e_1) \ \dots \ T(e_n)] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Fallet $m=n$: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

A inverterbar om $\exists C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ så att

$$CA = I = AC$$

Då säger vi $A^{-1} = C$. $[AI] \sim [IA^{-1}]$

Sats 8 i 2.3:

A inverterbar $\Leftrightarrow Ax=b$ unik lösning $\forall b$

$$(x = A^{-1}b) \Leftrightarrow \text{Col}(A) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{Nul}(A) = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank}(A) = n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dim(\text{Nul}(A)) = 0$$

$Ax=b \Leftrightarrow x = x_p + x_h$, $x_h \in \text{Nul}(A)$ och x_p en lösning.

LU faktorisering: $A = LU$

fås med radoperationer: $EA = U = \text{trappstegsform (ej reducerad)}$, $A = E^{-1}U = LU$

$$Ax=b, \quad LUx=b \quad \begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases} \text{ triangulära}$$

Vektorrum: mängd V som är sluten under linjär komb.

$$\begin{cases} x, y \in V \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in V$$

plus alla räkneregler

Behöver inte vara \mathbb{R}^n , tex. $V = \mathcal{G}([0,1])$, funktionsrum!

Bas för V : $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ linjärt oberoende mängd, $\dim(V) = n$.

Om ingen bas: $\dim(V) = \infty$.

Underrum: $U \subset V$ om $0 \in U$ och

$$\begin{cases} x, y \in U \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U.$$

Viktiga underrum ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$):

$$\text{Nul}(A) \subset \mathbb{R}^n$$

$$\text{Col}(A) \subset \mathbb{R}^m$$

$$\text{Row}(A) = \text{Col}(A^T) \subset \mathbb{R}^n$$

Rangsatsen:

$$\dim \text{Col}(A) + \dim \text{Nul}(A) = n$$

$$= \text{rank}(A)$$

$$= * \{ \text{pivotkolonner} \}$$

$$= * \{ \text{fria variabler} \}$$

Bas för $\text{Col}(A)$ = de kolonner i A som är på pivotposition

Bas för $\text{Nul}(A)$ fås ur parameterform med fria variabler som parametrar.

Determinant $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. $n=1$ $\det(a_{11}) = a_{11}$

2. $n=2$ $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

3. Rekursivt med kofaktorutveckling

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

↑
eller i

↑ ta bort
rad i och
kolonn j

$$\det(EA) = \det(E) \det(A) = \begin{cases} \det(A) & \text{rad } i \leftarrow \text{rad } i + c \text{ rad } j \\ -\det(A) & \text{rad } i \leftrightarrow \text{rad } j \\ c \det(A) & \text{rad } i \leftarrow c \text{ rad } i \end{cases}$$

↑
radoper.

↑ "bryt ut c ur rad i"

⇒ gör radoperationer till trappstegsform, sedan multiplicera ihop diagonalelementen.

Räkneregler:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B), \quad \det(A^T) = \det(A)$$

Egenvärdesproblemen ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

$\exists x \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ så att $Ax = \lambda x$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$ har icke-triv. lös.

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

Egenrum för λ_k : $E_{\lambda_k} = \text{span}\{\text{alla egenvektorer till } \lambda_k\}$. $P = [v_1, \dots, v_n]$

$AP = PD$ (dvs $Av_k = \lambda_k v_k$ på matrisform)

A är diagonaliserbar om P inverterbar

$A = PDP^{-1}, D = P^{-1}AP$

Detta gäller om * alla λ_k distinkta
 eller * $A^T = A$ i så fall P
 P ortogonal dvs $P^T P = I$

P inverterbar $\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ en bas för \mathbb{R}^n .

Ortogonalitet

$u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$

Pythagoras: $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

$\{u_1, \dots, u_p\}$ ortogonal mängd om $u_i \cdot u_j = 0, i \neq j$
ortonormal om $u_i \cdot u_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

\Rightarrow linj ober. \Rightarrow bas för $W = \text{span}\{u_1, \dots, u_p\}$

Koordinater för $x \in W$:

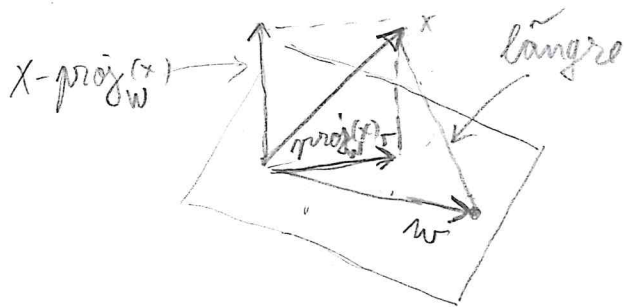
$x = \frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \dots + \frac{x \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p$

Om $x \notin W$, ortogonal proj på W :

$\text{proj}_W(x) = \frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \dots + \frac{x \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p$

ortogonal uppdelning:

$x = \underbrace{\text{proj}_W(x)}_{\in W} + \underbrace{(x - \text{proj}_W(x))}_{\in W^\perp}$ (unik uppdelning)



Bästa approx:

$$\|x - \text{proj}_W(x)\| \leq \|x - w\| \quad \forall w \in W, w \neq \text{proj}_W(x)$$

Med ortonormal bas (ON-bas)

$$U = [u_1, \dots, u_p] \in \mathbb{R}^{n \times p} \quad \text{fås}$$

$$\text{proj}_W(x) = U U^T x = [u_1, \dots, u_p] \begin{bmatrix} u_1^T x \\ \vdots \\ u_p^T x \end{bmatrix} = (u_1^T x)u_1 + \dots + (u_p^T x)u_p$$

Med $p=n$: $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är ortogonal

matris: $U^T U = I, U^{-1} = U^T$

$$\text{fy } (U^T U)_{ij} = u_i^T u_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Minstakvadratlösning till $Ax=b$

är \hat{x} sådan att $\|A\hat{x} - b\| \leq \|Ax - b\| \quad \forall x$.

Ges av normal ekvationerna

$$A^T A x = b$$

Kvadratisk form: $Q(x) = x^T A x, A^T = A$

$$A = P D P^T, x = P y \Rightarrow x^T A x = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

\Rightarrow lätt att se vilka värden $Q(x)$ tar.

T.ex. $Q(x) > 0, \forall x \neq 0$ (pos. definit)

\Leftrightarrow alla $\lambda_j > 0$.

Gycka till med tentan!

Stig