Idag: 1.6 Räta linjen och planet.

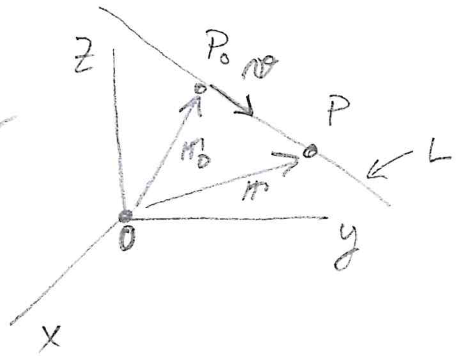
En rät linje L bestäms av

- en punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ på linjen
- en riktningsvektor $v = (v_x, v_y, v_z)$ som är parallell med linjen

En punkt $P = (x, y, z)$ är på linjen omm

$\overrightarrow{P_0P} = r - r_0 = t\,v$

för något t.



Dvs, på vektorform,

$r = r_0 + t\,v, \quad -\infty < t < \infty$

eller, på koordinatform,

$$\begin{cases} x = x_0 + t v_x \\ y = y_0 + t v_y \\ z = z_0 + t v_z \end{cases} \quad -\infty < t < \infty$$

Detta är linjens ekv. på parameterform.

Eliminera parametern t:

$$(t=)\ \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z} \quad (\text{om } v_x, v_y, v_z \neq 0)$$

Detta är räta linjens ekv på parameterfri form.

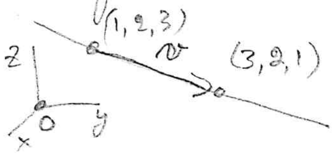
Om t. ex. $v_x = 0$:

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}$$

Viktigt: känna igen linjens ekvationer, läsa av riktningsvektor och punkt på L.

Ex 1.12. Rät linje genom två punkter.

$A = (1,2,3)$, $B = (3,2,1)$

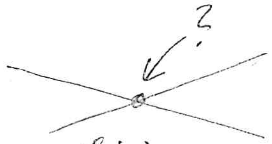


Välj $v = \overrightarrow{AB} = (2, 0, -2)$, $P_0 = (1,2,3)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad t \in (-\infty, \infty), \quad \frac{x-1}{2} = \frac{z-3}{3}, \ y = 2$$

Ex 1.13 Skärning mellan linjer

Visa att linjerna $x = y-1 = (z+1)/2$
och $(x-3)/2 = 1-y = z-2$ skär varandra
i en punkt.



Linjer skär normalt inte varandra.

På parameterform:

$$\begin{cases} x = 0+t \\ y = 1+t \\ z = -1+2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3+2s \\ y = 1-s \\ z = 2+s \end{cases}$$

Skärning ges av

$$\begin{cases} t = 3+2s & (1) \\ 1+t = 1-s & (2) \\ -1+2t = 2+s & (3) \end{cases}$$

3 ekv. 2 obekanta. Lösning? Inte självklart.

Ekv (2): $t=-s$. Insatt i (1): $-s = 3+2s$, $s=-1$

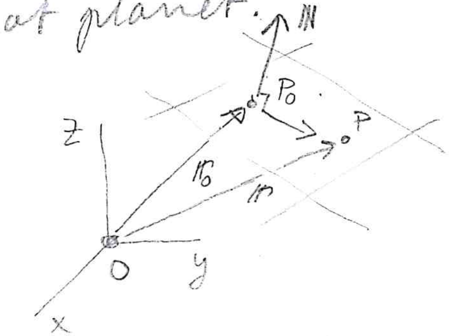
Dvs $s=-1$, $t=1$. Insatt i (3): $-1+2t = 1$ och $2+s = 1$

Ekv. (3) är också uppfylld. Unik lösning.

Skärningspunkten är $x=1, y=2, z=1$,
dvs $P=(1,2,1)$.

Ett plan π bestäms av

- en punkt $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ i planet
- en normalvektor $\mathbb{N}=(N_x,N_y,N_z)$ som är ortogonal mot planet.



En punkt $P=(x,y,z)$ är i planet omm

$$\mathbb{r}-\mathbb{r}_0 = \overrightarrow{P_0P} \perp \mathbb{N}$$

dvs

$$\mathbb{N}\cdot(\mathbb{r}-\mathbb{r}_0)=0$$

eller, med komponenter,

$$N_x(x-x_0)+N_y(y-y_0)+N_z(z-z_0)=0$$

Kan även skrivas

$$Ax+By+Cz=D$$

där $A=N_x$, $B=N_y$, $C=N_z$, $D=N_x x_0+N_y y_0+N_z z_0$.

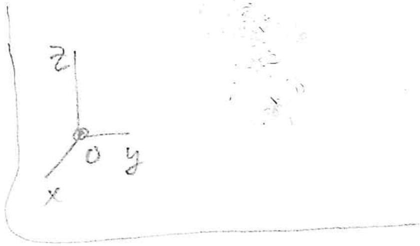
Dessa är planets ekvation i olika form.

Viktigt: känna igen planets ekvation, läsa av en normalvektor och en punkt i planet.

Ex 1.14 Ett plan genom tre punkter

$A=(1,1,1)$, $B=(1,2,3)$, $C=(-1,2,1)$

Välj $P_0 = A$.



$$\mathbb{N} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} e_x - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} e_y + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} e_z = (-2,-4,2)$$

Planets ekvation: $\mathbb{N} \cdot (\mathbb{r} - \mathbb{r}_0) = 0$

$$-2(x-1) - 4(y-1) + 2(z-1) = 0$$

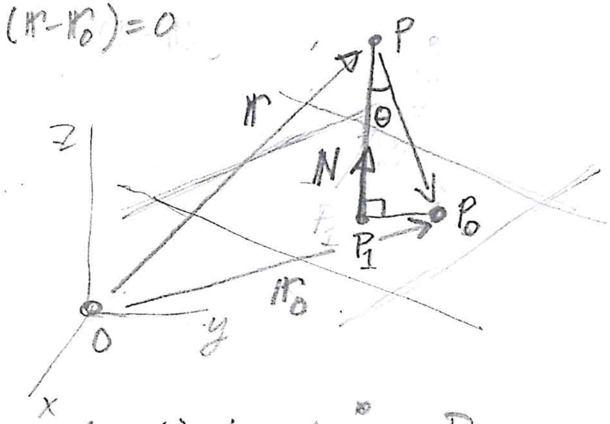
Kan förenklas: $x + 2y - z = 2$

Läser av en normalvektor:

$\mathbb{N}_1 = (1,2,-1)$ och en punkt: $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = -2$

Obs: $\mathbb{N} = -2\mathbb{N}_1$

Ex Avståndet mellan punkten P och planet $\mathbb{N} \cdot (\mathbb{r} - \mathbb{r}_0) = 0$



Drag en normal-linje från P till planet. Den skär planet i P_1. Avståndet är $|\vec{PP_1}|$. Det är lika med beloppet av skalära proj. av $\vec{PP_0}$ på $\hat{\mathbb{N}}$:

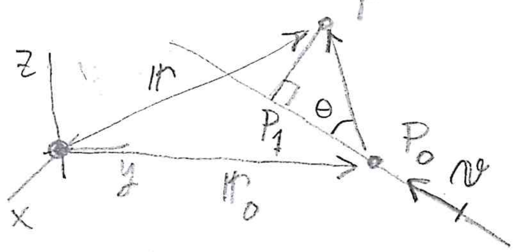
$$d = |\operatorname{sproj}_{\mathbb{N}}(\vec{PP_0})| = |\vec{PP_0} \cdot \hat{\mathbb{N}}| = \left|(\mathbb{r}_0 - \mathbb{r}) \cdot \frac{\mathbb{N}}{|\mathbb{N}|}\right|$$

$$= \frac{|(\mathbb{r} - \mathbb{r}_0) \cdot \mathbb{N}|}{|\mathbb{N}|} = \frac{|(\mathbb{r} - \mathbb{r}_0) \cdot \mathbb{N}|}{|\mathbb{N}|}$$

Stig Larsson stig@chalmers.se

Ex Avståndet mellan punkten P och linjen $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}$.

Antag $\mathbf{v}$ riktad enligt fig från P_0 mot P_1. Annars byt $\mathbf{v}$ mot $-\mathbf{v}$.

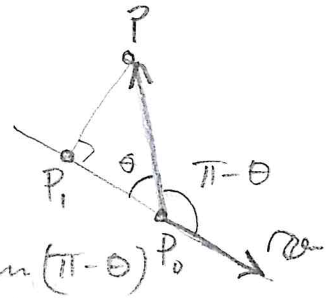


$$d = |\overrightarrow{P_0P}|\sin(\theta) = |(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)|\sin(\theta)$$

Men $|(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{v}| = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0||\mathbf{v}|\sin(\theta)$

så att $d = \dfrac{|(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$

Eller:



$$\sin(\theta) = \sin(\pi-\theta)$$

$$|(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{v}| = |(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)||\mathbf{v}|\sin(\pi-\theta)$$

Svåra avståndsberäkningar blir lätta om man använder vektorer och skalär- och kryssprodukt!