Idag: Linjära ekvationssystem.
Gauss elimationsmetod.
Lay 1.1-1.2

En linjär ekvation i n variabler har formen

$$\underset{\uparrow}{a_1}x_1 + a_2 x_2 + \dots a_n x_n = b.$$

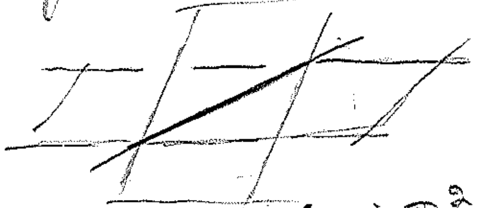
koefficienter variabler

Ett linjärt ekvationssystem (LES) är en samling av m linjära ekvationer.

Exempel
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 7 \\ x_1 \qquad + 8x_3 = 4 \end{cases} \quad (m=2,\ n=3)$$

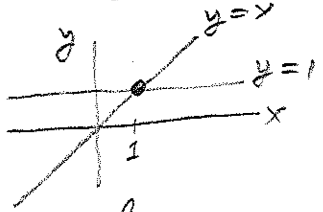
Mål Att lösa LES, dvs finna värden på $x_1, \dots, x_n$ som uppfyller ekvationerna.

Obs: $ax+by+cz=d$ är ekvation för ett plan i $\mathbb{R}^3$.
$\Rightarrow$ LES i 3 variabler beskriver skärning av plan



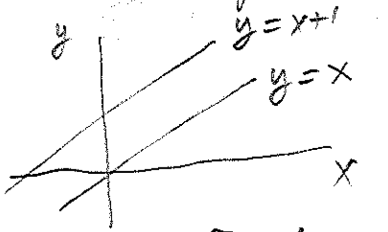
Enklare i $\mathbb{R}^2$: $ax+by=c$, linje i $\mathbb{R}^2$.

Exempel
$$\begin{cases} 1x - 1y = 0 \\ 0x + 1y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ y = 1 \end{cases}$$



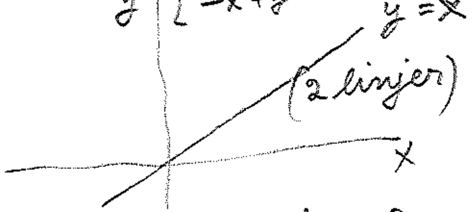
unik lösning:
$x=1,\ y=1.$

Fler exempel:



Inga lösningar.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$



Oändligt många lösningar.

Alltså: Antingen 1, inga eller ∞ många lösningar.

<u>Def</u> ett LES är <u>konsistent</u> om det har lösningar, annars <u>inkonsistent</u>.

<u>Lösningsmängd</u>: alla $x \in \mathbb{R}^n$ som löser LES.

Vi ska nu presentera en lösningsmetod för LES som är <u>systematisk</u> (<u>algoritm</u>) och leder till en <u>standardform</u> som avslöjar lösningsmängden.

<u>Exempel</u> (Gausselimination)

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 & \quad (-2) \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 8 & \quad \swarrow \\ \phantom{x_1+{}} 4x_2 - 4x_3 = 2 & \end{cases}$$

Addera $(-2) *$ ekv. 1 från ekv. 2:

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 & \\ -8x_2 + 4x_3 = 4 & \quad (1/2) \\ \phantom{x_1+{}} 4x_2 - 4x_3 = 2 & \quad \swarrow \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow (2)$ i den meningen att de har samma lösningsmängd.

Titta nu på ekv 2 och 3. Addera $\frac{1}{2} \times$ ekv 2 till ekv 3:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 & \quad \leftarrow \\ -8x_2 + 4x_3 = 4 & \quad \leftarrow \; (2) \quad (-3/2) \\ -2x_3 = 4 & \end{cases}$$

Nu har vi x_3 och kan bestämma x_2 och x_1 genom att sätta in $x_3 = -2$.

Tydligare: fortsätt den systematiska proceduren bakåt:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -4 & \quad \leftarrow \\ -8x_2 = 12 & \quad (-1/8) \quad (3/8) \\ -2x_3 = 4 & \quad (-\tfrac{1}{2}) \end{cases}$$

Till slut har vi:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 1/2 \\ \quad x_2 \qquad = -3/2 \\ \qquad\quad x_3 = -2 \end{cases}$$

Effektivt skrivsätt: <u>matrisform</u>.

<u>Koefficientmatrisen</u>:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \qquad (3\times 3)$$

<u>Högerledsvektorn</u> (matrisen):

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (3\times 1)$$

<u>Totalmatrisen</u>:

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad (3\times 4)$$

<u>Def</u> En $m\times n$-matris har m rader och n kolonner. Skrivs $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Vårt exempel kan nu skrivas:

ekvivalent

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \end{array}\right] \boxed{-2}\ \boxed{0} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \end{array}\right] \boxed{1/2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \boxed{2}\ \boxed{-3/2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & -8 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \begin{matrix} \boxed{-3/8}\ \boxed{-1/8} \\ \boxed{-1/2} \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Vi använder följande <u>radoperationer</u>:

1. Addera en multipel av en rad till en annan rad.
2. Multiplicera en rad med en konstant ($\neq 0$)
3. Byt plats på två rader.

Obs: radoperationer är <u>inverterbara</u>, dvs man kan <u>transformera tillbaka</u>.

Def Två matriser är <u>radekvivalenta</u> om de kan transformeras till varandra genom radoperationer. Skrivs: $A \sim B$

Sats (sid 23) Om totalmatriserna för två LES är radekvivalenta så har de samma lösningsmängd.

Bevis Det är klart att radoperationer av typ 2 och 3 inte ändrar lösningsmängden. För typ 1 resonerar vi så här. Antag $x_1, \dots, x_n$ löser de två ekvationerna

$$\begin{aligned} a_1x_1 + \dots + a_nx_n - b &= 0 \quad \textcircled{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ c_1x_1 + \dots + c_nx_n - d &= 0 \leftarrow \end{aligned}$$

Efter radoperation 1 får vi

$$(c_1x_1 + \dots + c_nx_n - d) + \alpha(a_1x_1 + \dots + a_nx_n - b) = 0$$

dvs den transformerade ekv. är uppfylld.

Å andra sidan: om den transformerade ekv. är uppfylld så kan vi transformera tillbaka med operation av typ 1 och se att den ursprungliga ekv. är uppfylld. ▨

Exempel (Ex. 3 i Lay sid 24)

$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{array}\right] \text{typ } 3 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{array}\right] \textcircled{-2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{array}\right] \textcircled{2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

Ekv 3 är $0x_3 = 15$ dvs $0 = 15$!

Ingen lösning. Inkonsistent LES.

Ändra ekv 3: $4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = -14$

Då fås $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \textcircled{3} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -10 & 25 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \textcircled{1/2} \sim$

$0x_3 = 0 \leftarrow$ konsistent!

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 25/2 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 \quad -5x_3 = 25/2 \\ \quad x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$$

Variablerna x_1, x_2 är bundna (basic) och x_3 är fri. ∞ många lösningar.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{25}{2} + 5x_3 \\ x_2 = 8 + 4x_3 \end{cases}$$

Välj x_3 godtyckligt. Beräkna sedan x_1, x_2.

På parameterform: ($x_3 = t$ parameter)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{25}{2} + 5t \\ x_2 = 8 + 4t \\ x_3 = t \end{cases}$$

linje genom $(\frac{25}{2}, 8, 0)$ parallell med $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Def Trappstegsform (echelon form) ser ut så här typiskt:

$$\begin{bmatrix} \circledast & * & * & * & * & * \\ 0 & \circledast & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \circledast & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \circledast \end{bmatrix}$$

Precis definition på sid 29.

$\circledast$ = pivotelement ($\neq 0$), $*$ = godtycklig

Reducerad trappstegsform
(reduced row echelon form)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1 = pivotelement
$*$ = godtycklig

(Stavas även pivå.)

Sats 1 (i 1.2) Varje matris är radekvivalent med en unik reducerad trappstegsmatris.

Bevis i Appendix. Lite för svårt.

Def Bundna variabler hör till pivotpositioner. Övriga kallas fria variabler.

Detaljerad algoritm på sid 31-33.

I Matlab: rref.