Idag: Linjärt beroende.
Linjär avbildning.
Lay 1.7 – 1.9

Linjärt oberoende 1.7

Def En mängd av vektorer $\{v_1, \dots, v_p\}$ är linjärt oberoende om vektorekvationen

$$(*) \quad c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = 0$$

endast har triviala lösningen $c_k = 0$, $k = 1, \dots, p$.

Mängden är linjärt beroende annars, dvs om det finns $\{c_k\}_{k=1}^{p}$ med något $c_j \neq 0$ så att (*) gäller.

(*) är då ett linjärt samband mellan vektorerna.

Ex Är $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ linjärt oberoende?

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} -3 & -5 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 & -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

c_3 är fri, alltså ej linjärt oberoende.

Tag t.ex. $c_3 = 1$, $c_2 = -2c_3 = -2$, $c_1 = c_3 = 1$, så att

$1v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$ är ett linjärt samband.

Sats 7 Mängden $S=\{v_k\}_{k=1}^{p}$ är linjärt beroende omm minst en v_j är en linjär kombination av de övriga.

Bevis $\Leftarrow$ Antag $v_j = c_1v_1+\dots+$
$+c_{j-1}v_{j-1}+c_{j+1}v_{j+1}+\dots c_pv_p$.

Då är

$$c_1v_1+\dots+c_{j-1}v_{j-1}-1v_j+c_{j+1}v_{j+1}+\dots+c_pv_p=0$$

dvs S är linjärt beroende.

$\Rightarrow$ Om S är linjärt beroende

så $c_1v_1+\dots+c_pv_p=0$
med någon $c_j\neq 0$. Då har vi

$$c_jv_j=-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p}c_kv_k,\quad v_j=-\frac{1}{c_j}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p}c_kv_k$$

☑

Sats 8 Fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ är alltid linjärt beroende.

Bevis Låt $A=[v_1,\dots,v_p]$, $n\times p$, med $p>n$. Ekv $Ax=0$ har då fler variabler än ekvationer. Därför minst en fri variabel. Alltså icke-trivial lösning och därmed linjärt beroende. □

Linjära avbildningar 1.8

Vi har sett att $x\longmapsto Ax$ är en linjär operation.

Om $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $x\in\mathbb{R}^n$ så är $Ax\in\mathbb{R}^m$, så vi har en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$.
Vi skriver $T(x)=Ax$.

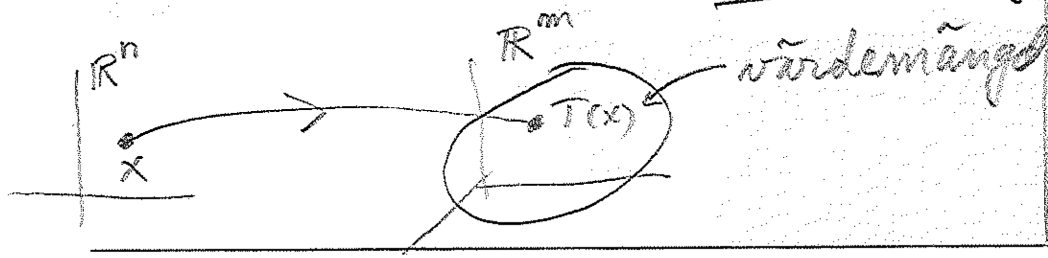
Def En *avbildning* (funktion, transformation) från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är en regel som tilldelar ett element $T(x) \in \mathbb{R}^m$ till varje element $x \in \mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ kallas *definitionsmängd*.

$\mathbb{R}^m$ kallas *målmängd*.

Vi skriver
$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto T(x)$$

$T(x)$ kallas *bilden* av x och $\{T(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ kallas *värdemängd*.



Obs T behöver inte vara av formen $T(x) = Ax$ med matris A, men vi ska se att det gäller för linjära avbildningar.

Def $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kallas *linjär avbildning* om

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$
$$T(cu) = cT(v)$$

dvs om den *bevarar linjär kombination*.

<u>Obs</u> Värdemängden för $T: x \mapsto Ax$ med $A = [a_1 \dots a_n]$ är $\operatorname{span}\{a_1 \dots a_n\}$

Se F5.3

Vår fråga: Har $Ax = b$ lösning? kan formuleras: Är b i värdemängden för $T: x \mapsto Ax$?

Matrisen för linjär avb. 1.9

Givet en linjär avbildning T kan vi hitta en matris A så att $T: x \mapsto Ax$?

Svar: Ja, kolla vad T gör med basvektorerna.

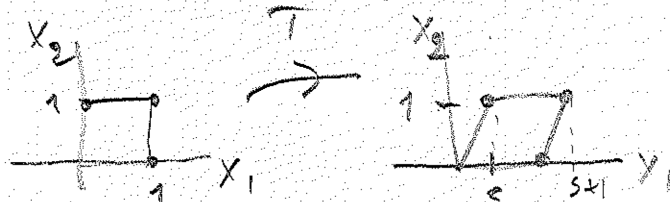
Basvektorer i $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{rad } j$$

<u>Ex.</u> $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

och $$T(x) = T(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \overset{\text{linjär}}{=} x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + x_3 T(e_3) = [T(e_1)\ T(e_2)\ T(e_3)]\,x = Ax$$

<u>Exempel</u> Skjuvning i $\mathbb{R}^2$:



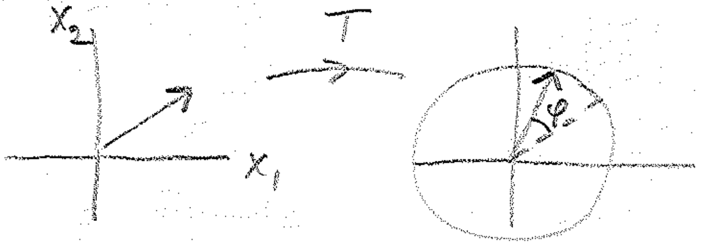
Kolla: $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

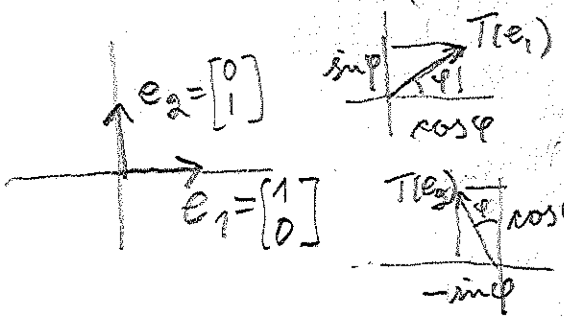
Sats 10 Om $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ är linjär avbildning så är $T(x)=Ax$ med $A=[T(e_1)\dots T(e_n)]$.

(Utan bevis.)

Exempel Rotation i $\mathbb{R}^2$



Kolla vad T gör med e_1, e_2.



$T(e_1)=\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}$

$T(e_2)=\begin{bmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

På sid 92–94 presenteras några fler beteckningar för avbildningar.

* $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ kallas surjektiv (onto) om värdemängden är hela $\mathbb{R}^m$. I så fall har ekv. $T(x)=b$ lösning för alla $b\in\mathbb{R}^m$.

* $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ kallas injektiv (one-to-one) om $x\neq y \Rightarrow T(x)\neq T(y)$.

  (aldrig så: $x, y \longrightarrow T(x)=T(y)$)

  I så fall är lösn till $T(x)=b$ alltid unik (om det finns någon)