

Idag: Matrisalgebra.  
 Matrisräkning 2.1  
 Invers matris 2.2

Lite beteckningar: (Lag 2.1)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , matris av typ  $m \times n$

$A = (a_{ij})$ , element  $a_{ij}$  på plats  $(i, j)$ , rad  $i$ , kolonn  $j$ . Även  $a_{ij} = (A)_{ij}$ .

$A = [a_1, \dots, a_n]$ , kolonner  $a_k \in \mathbb{R}^m$ .

$O$  eller  $O_{m \times n}$ , nollmatrisen av typ  $m \times n$ .

$I$  eller  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , identitets- matrisen av typ  $n \times n$ ,  $(I)_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Def. Låt  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  vara  $m \times n$  matriser. Då är

\*  $A = B$  om  $a_{ij} = b_{ij} \forall i, j$

\*  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

\*  $cA = (c a_{ij})$

Dvs elementvis. Obs: samma typ.

Ex.  $2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$

Sats 1 De vanliga räkne-reglerna.

T.ex.  $A + B = B + A$   
 $A + O = O + A = A$

Elementvis produkt (Hadamard-produkt)

$A \circ B = (a_{ij} b_{ij})$  (samma typ)

Matlab:  $A .* B$  Vi studerar inte denna produkt

# Matrisprodukt

Låt  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $x \in \mathbb{R}^r$ .

Då är

$$Bx \in \mathbb{R}^n, A(Bx) \in \mathbb{R}^m$$

Men

$$Bx = x_1 b_1 + \dots + x_r b_r = x_1 \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} + \dots + x_r \begin{bmatrix} b_{1r} \\ \vdots \\ b_{nr} \end{bmatrix}$$

så

$$\begin{aligned} A(Bx) &= x_1 A b_1 + \dots + x_r A b_r \\ &= [A b_1, \dots, A b_r] x \end{aligned}$$

Detta motiverar följande:

Def Om  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  och  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  så är produkten  $AB \in \mathbb{R}^{m \times r}$  definierad av  $AB = [A b_1, \dots, A b_r]$ .

Obs: bara om typerna stämmer;  $(m \times n) \cdot (n \times r) = m \times r$

Ex

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 34 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 34 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rad-kolonn-regeln: skalärprod.

$$(AB)_{ij} = \text{rad}_i(A) \cdot \text{kol}_j(B) =$$

$$\left( \begin{array}{c|c} \text{rad}_i & \text{kol}_j \end{array} \right)$$

$$= [a_{i1}, \dots, a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Matlab:  
 $A * B$

Obs:  $AB \neq BA$  i allmänhet, produkten är ej kommutativ. Om  $BA = AB$  så säger vi att  $A$  och  $B$  kommuterar. (Då måste  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ )

Ex  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$  ( $3 \times 2$ ),  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  ( $2 \times 3$ )

Beräkna AB och BA i Matlab. Inte

Ex  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$  } ens samma typ.

Beräkna  $AB = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 19 & 26 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 19 & 28 \end{bmatrix}$ .

Samma typ men inte lika.

Potens  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (kvadratisk matris  
då  $m=n$ )

$A^k = A A \dots A$ ,  $k$  faktorer.

Transponat  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ges av

$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$

Rader och kolonner byter plats.

Sats 2 Räknerregler.

(om typerna stämmer!)

$A(BC) = A(BC)$

$A(B+C) = AB + AC$

$(B+C)A = BA + CA$

$c(AB) = (cA)B = A(cB)$

$I_m A = A I_n$  ( $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ )

Läs bevis.

Sats 3 Transponat.

a.  $(A^T)^T = A$

b.  $(A+B)^T = A^T + B^T$

c.  $(cA)^T = c A^T$

d.  $(AB)^T = B^T A^T$

Bewis d:  $((AB)^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}$

Matrisinvers 2.2Vi har additiv invers:

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

Multiplikativ invers:Def En  $n \times n$  matris  $A$  är inverterbar om det finnsmatris  $C$  så att

$$AC = CA = I.$$

I så fall är  $C$  unikt.Vi skriver  $C = A^{-1}$ , inversen till  $A$ .

$$\text{Alltså: } AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

 $A$  är singulär om ej inverterbar.

Beweis unikt.

Antag:

$$AC = I \text{ (högerinvers)}$$

$$BA = I \text{ (vänsterinvers)}$$

$$\Rightarrow (BA)C = IC$$

$$\Rightarrow BI = C \Rightarrow B = C$$

Sats 4 (Invers av  $2 \times 2$  matris)Låt  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Om  $ad - bc \neq 0$ så är  $A$  inverterbar och

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Annars är  $A$  singulär.Beweis Multiplicera ihop:

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (ad - bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resten i övn 25, 26.

Obs:  $2 \times 2$  matrisen  $A$  är inverterbar  $\Leftrightarrow$ 

$$\det(A) = ad - bc \neq 0.$$

Vi återkommer till detta i Kap. 3.

Sats 5 Om  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  är  
inverterbar så har  $Ax=b$   
en unik lösning för alla  $b \in \mathbb{R}^n$ .  
Den ges av  $x=A^{-1}b$ .

Bewis Låt  $b \in \mathbb{R}^n$  och sätt  $x=A^{-1}b$ .  
Då fås  $Ax=A(A^{-1}b)=(AA^{-1})b$   
 $=Ib=b$ . Alltså har vi  
minst en lösning för varje  $b$ .  
Antag att det finns en annan  
lösning  $y$ , dvs  $Ay=b$ .  
Men då har vi  $\underbrace{A^{-1}Ay}_y = \underbrace{A^{-1}b}_x$   
dvs  $y=x$ .  $\square$

Sats 6 Egenskaper hos  $A^{-1}$ .

- $A$  inverterbar  $\Rightarrow A^{-1}$  inverte-  
rbar med  $(A^{-1})^{-1}=A$ .
- $A, B$  inv.  $\Rightarrow AB$  inv. med  
 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ .
- $A$  inv.  $\Rightarrow A^T$  inv. med  
 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ .

Bewis b: Kolla def. av invers:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1} \underbrace{A^{-1}A}_I B = B^{-1}B = I$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A \underbrace{BB^{-1}}_I A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Säs resten i Sag.

Hur beräkna  $A^{-1}$ ?

Svar: radreducera  $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$ .

Jag går igenom det imorgon.