Idag: Matrisinvers, forts. 2.2, 2.3
LU-faktorisering 2.5
(Blockmatriser översiktligt 2.4)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar om det finns $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ så att

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Hur beräkna A^{-1} (om den finns)?

Svar: radreducera $[A\ I_n] \sim [I_n, A^{-1}]$.

För att bevisa detta skriver vi radoperationerna som matrismultiplikationer.

Ex
$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = I_3 + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ← flyttar rad 2 till rad 3

så att med $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$E_1 A = A + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

dvs addera 2∗rad 2 till rad 3.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ byter plats på rad 2 och 3 (permutation)

$$E_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 2∗rad 1 (skalning)

Dessa tre slags matriser kallas <u>elementära</u> matriser. Motsvarar tre slags elementära radoperationer.

<u>Sats</u> De elementära matriserna är inverterbara.

<u>Bevis</u> Radoperationer är reversibla.

Ex $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ addera -2∗rad 2 till rad 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sats 7 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar omm

A är radekvivalent med I_n.

De radoperationer som reducerar A till I_n reducerar I_n till A^{-1}.

Dvs $[A\ I] \sim [I\ A^{-1}]$.

Bevis ($\Rightarrow$): A inverterbar $\overset{\text{Sats 5}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow$ $Ax = b$ lösbart för alla b

$\overset{\text{Sats 4, kap 1.}}{\Rightarrow}$ A har pivotposition i varje kolonn

$\overset{A\ n\times n}{\Rightarrow}$ $A \sim I_n$

($\Leftarrow$): Antag $A \sim I_n$. Det vill säga

$E_p E_{p-1} \cdots E_1 A = I_n$

för några elementära matriser.

Men de elementära matriserna är inverterbara, så att

$A = (E_p \cdots E_1)^{-1} I_n = E_1^{-1} \cdots E_p^{-1}$

Då är A inverterbar med inversen

$A^{-1} = (E_1^{-1} \cdots E_p^{-1})^{-1} = E_p \cdots E_1$

$\square$

Med $E = E_p \cdots E_1$ har vi alltså:

$E[A|I] = [EA|EI] = [I|E] = [I|A^{-1}]$

Metod för att beräkna A^{-1}:

radreducera $[A\ I]$, det ger antingen $[I\ A^{-1}]$ eller visar att A är singulär.

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (-1) $\quad [A\ I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $E[A\ I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$

Alltså: $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ singulär

Ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (-3) $\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $(-\frac{1}{2})$ $\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (-2) $\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ forts.

$E_3 \; E_2 \; E_1 A = I$ Matlab!

$$A^{-1} = E_3 E_2 E_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Jämför Sats 4: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

Obs: Vi beräknar A^{-1} för teorins skull, sällan för att lösa $Ax=b$ med $x=A^{-1}b$. Det är bättre att lösa LES genom att radreducera $[A|b]$.

2.3 Karakterisering av inverterbara matriser.

Sats 8 Läs! 12 påståenden är ekvivalenta med A inverterbar

Jag visar den på skärmen och diskuterar beviset.

Ex 1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Vi ser redan här att A är inverterbar för vi har pivotpositioner i varje kolonn. För att bestämma A^{-1} måste vi fortsätta reduceringen. Matlab i slutet av F8.

2.5 Faktorisering

Skriv matrisen A som en produkt:

$$A = BC$$

Att faktorisera (finna B, C) är en <u>analys</u> av A (dela upp).

Givet B, C, beräkna $BC = A$ är då en <u>syntes</u> (sätta ihop).

Detta förekommer i många sammanhang.

Vi börjar med <u>LU-faktorisering</u> $A = LU$, i kap 2.5.

<u>Ex</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 3 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \; (2) \; (-1) \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix} \; (-2) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

trappstegsmatris, upper triangular <u>övertriangulär</u>

Alltså:

$$U = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{=E_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=E_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=E_1} A, \quad U = E_3 E_2 E_1 A$$

Elementära matriser av typ 1. De är <u>undertriangulära</u> med 1 på diagonalen.

Ej använt E av typ 2 (permutera rader) eller typ 3 (skala rad).

$$A = (E_3 E_2 E_1)^{-1} U = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} U =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{också undertriangulära med 1 på diagonalen}} U =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{=L} U = LU$$

Matlab-kod i slutet av F8.

också undertriangulär med 1 på diagonalen.

Vi har en LU faktorisering av A: $A = LU$

där L "unit lower triangular"

U "upper triangular"

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ * & \ddots & \\ * & \cdots * & 1 \end{bmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{bmatrix}}_{=U}$$ (alla är $n \times n$)

Metod: 1. radreducera

$$E_p \cdots E_1 A = U$$

2. multiplicera ihop

$$L = E_1^{-1} \cdots E_p^{-1}$$

Mer effektivt är att observera att

$$E_p \cdots E_1 L = I$$

(dvs $L = (E_p \cdots E_1)^{-1}$) och placera in kolonner i L så att detta gäller. Dvs utan multiplikation.

__Ex__ samma som förut.

Vi har radreducerat och vet E_1, E_2, E_3.

Vi vill bestämma L så att $E_3 E_2 E_1 L = I$

Bara E_1, E_2 påverkar kolonn 1 i L.

Då måste kol. 1 i L vara $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Bara E_3 påverkar kol. 2.

Då måste kol. vara $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Sist kol 3: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Alltså $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Varför är $A = LU$ bra?

Effektiv lösning av $Ax = b$.

Vi får $(LU)x = b$

$L(Ux) = b$

Sätt $y = Ux$ och $Ly = b$

Metod: 1. lös $Ly = b$

2. lös $Ux = y$

Två triangulära system, lätta att lösa: n^2 operationer vardera.

Men måste först bestämma L, U vilket kostar $\frac{2}{3}n^3$ operationer.

Direkt lösning av $Ax = b$ med Gauss-elimination kostar också $\frac{2}{3}n^3$ operationer.

Alltså: LU lönar sig om man ska lösa $Ax = b$ med samma A men många olika b.

Och när n är stort, t.ex. $n = 10^5$ eller 10^6.

Då är $n^2 << n^3$.

Läs 2.4 översiktligt.

Sammanfattning:

Radreducering och invers matris används för teori och förståelse av matriser och linjära transformationer och ekvationssystem, inte så ofta för lösning.

LU-faktorisering är en algoritm som implementeras i datorprogram och används för effektiv lösning av (stora) linjära ekv. system.

Blockmatris 2.4

Ibland är det fördelaktigt att dela upp en (stor) matris i block och räkna blockvis.

T.ex.

$$\begin{array}{c} m \\ q \end{array}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\begin{array}{c} n \\ p \end{array} = \begin{bmatrix} AX + BY \\ CX + DY \end{bmatrix}\begin{array}{c} m \\ q \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} n & p \end{array} \qquad r \qquad\qquad r$$

Produkterna AX, BY, CX, DY kan beräknas separat (parallellt).

Ex

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 8 & 9 & 8 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} 1 \\ \begin{bmatrix} 9 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 8 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

$*$ = orkar inte räkna ut.

```
%%  Matlab-kod till Ex 1 i F8

clear all
A=[1 0 -2; 3 1 -2; -5 -1 9]
E1=eye(3,3); E1(2,1)=-3             % gör 0 i element (2,1)
A1=E1*A
%%
E2=eye(3,3); E2(3,1)=5              % gör 0 i element (3,1)
A2=E2*E1*A
%%
E3=eye(3,3); E3(3,2)=1              % gör 0 i element (3,2)
A3=E3*E2*E1*A
%%
E4=eye(3,3); E4(3,3)=1/3            % skalning av element (3,3)
A4=E4*E3*E2*E1*A
%%
E5=eye(3,3); E5(2,3)=-4; E5(1,3)=2  % gör 0 i element (2,3) och (1,3)
A5=E5*E4*E3*E2*E1*A
%%
Ainv=E5*E4*E3*E2*E1                 % bilda inversa matrisen
A*Ainv
Ainv*A
%%
inv(A)                               % jämför med Matlabs inv()
%%
I=eye(3,3);
B=rref([A I])                        % reducera den utvidgade matrisen
Aii=B(:,4:6)                         % ta ut inversen
```

```
%% Matlab-kod till LU-exemplet i F8

clear all
A =[2 4 -1;-4 -5 3; 2 10 4]
E1=eye(3,3); E1(2,1)=2
E2=eye(3,3); E2(3,1)=-1
E3=eye(3,3); E3(3,2)=-2
U =E3*E2*E1*A

%% inversa elementärmatriser
E11=eye(3,3); E11(2,1)=-2
E22=eye(3,3); E22(3,1)=1
E33=eye(3,3); E33(3,2)=2
L  =E11*E22*E33

LU=L*U
A
```