Idag: Vektorrum 4.1–4.2
Underrum av $\mathbb{R}^n$ 2.8

Mål: visa att man kan räkna i andra mängder än $\mathbb{R}^n$.

4.1, 2.8 Vektorrum

Def Ett vektorrum V är en icke-tom mängd av element (kallade vektorer) som man kan addera och multiplicera med skalär. Följande räkneregler ska gälla:

1. $u, v \in V \Rightarrow u + v \in V$
2. $u + v = v + u$
3. $(u+v)+w = u+(v+w)$
4. $\exists\, 0 \in V$ så att $u + 0 = u$
5. $\forall u \in V\ \exists -u \in V$ så att $u + (-u) = 0$
6. $u \in V, c \in \mathbb{R} \Rightarrow cu \in V$
7. $c(u+v) = cu + cv$
8. $(c+d)u = cu + dv$
9. $c(du) = cdu$
10. $1u = u$

Vi har redan två exempel.

Ex $V = \mathbb{R}^n$ vektorer av dim. n

Ex $V = \mathbb{R}^{m\times n}$ matriser av typ $m \times n$

Nytt exempel:

Ex $V = \mathcal{C}([0,1]) = \{$ alla kontinuerliga funktioner $f : [0,1] \to \mathbb{R} \}$.

Definition: addition $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

mult. med skalär $(cf)(x) = cf(x)$

dvs definieras punktvis.

Kolla villkoren:

Antag $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$, dvs f, g är kontinuerliga.

Men då är $f+g$ kontinuerlig och cf är kontinuerlig. (Läsperiod 1)

Alltså: $f+g \in \mathcal{C}([0,1])$ och $cf \in \mathcal{C}([0,1])$.

Detta visar 1. och 6. Detta är icke-triviala resultat från lp 1. Resten är enkelt.

T.ex. nollfunktionen $0(x) = 0\ \forall x$.

Obs: 1. och 6. innebär att V är slutet under linjär kombination: $u, v \in V \Rightarrow$
$\Rightarrow cu + dv \in V$

Dvs man stannar kvar i V.
Det är ofta det svåra att kolla.

Underrum (subspace)

Def Ett underrum av ett vektorrum V är en delmängd U av V ($U \subset V$) sådan att

1. $0 \in U$ (där 0 är nollvektorn i V)
2. $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$
3. $u \in U, c \in \mathbb{R} \Rightarrow cu \in U$

(U är sluten under linjär kombination.)

Obs: U är ett vektorrum!
Varje $u \in U$ är också i V så räknereglerna följer direkt.
T.ex. $u, v \in U \Rightarrow u + v = v + u$ för detta gäller i V.

Triviala underrum:

* $U = \{0\}$ bara nollvektorn
* $U = V$ hela V

Ex $\mathbb{R}^2$ är ej underrum till $\mathbb{R}^3$, för $\mathbb{R}^2$ är ej delmängd av $\mathbb{R}^3$

Men $U = \left\{ v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ är underrum av $\mathbb{R}^3$, för $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in U$, $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in U$

och $c \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in V$ (U är sluten)

Ex Låt $v_1, \dots, v_p \in V$ och

$U = \text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$.

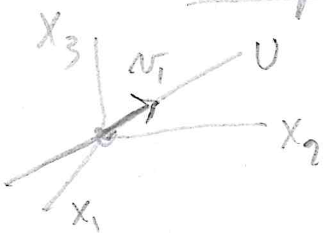
Då är U ett underrum av V.

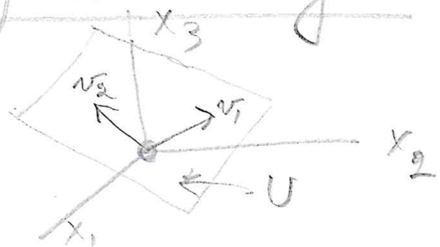
1. $0 \in U$, ty $0 = 0v_1 + \dots + 0v_p \in U$
2. $u = a_1 v_1 + \dots + a_p v_p \in U$

   $v = b_1 v_1 + \dots + b_p v_p \in U$

   $\Rightarrow u + v = (a_1 + b_1)v_1 + \dots + (a_p + v_p)v_p \in U$
3. $cu = (ca_1)v_1 + \dots + (ca_p)v_p \in U$.

Ett typiskt underrum av $\mathbb{R}^3$ är en linje genom origo eller ett plan genom origo.



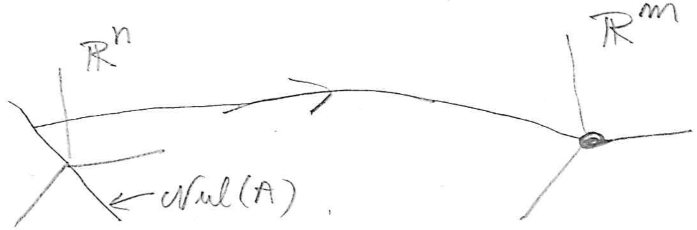


Sats 1 i 4.1 $\text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$ är ett underrum av V.

Bevis: som i exemplet.

Viktigt underrum nr 1: nollrum.

Def $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. A:s nollrum är $\text{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$



Sats 2 i 4.2 $\text{Nul}(A)$ är underrum av $\mathbb{R}^n$.

Bevis
1. $A0 = 0$, så att $0 \in \text{Nul}(A)$
2. $u, v \in \text{Nul}(A) \Rightarrow Au = Av = 0 \Rightarrow$

   $\Rightarrow A(u+v) = Au + Av = 0 \Rightarrow u, v \in \text{Nul}(A$
3. på samma vis

Obs * Lätt att testa om $v \in \mathrm{Nul}(A)$: beräkna Av.

* Svårt hitta $v \in \mathrm{Nul}(A)$: måste lösa $Av = 0$.

* $v \in \mathrm{Nul}(A)$ är "homogenlösning" till $Ax = b$.

Lös $Ax = 0$. Icke-trivial lösning fås på parameterform med fria variabler som parametrar. T.ex.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{=v_1} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}_{=v_2}$$

dvs här är $\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$

Ibland blir $\mathrm{Nul}(A) = \{0\}$, dvs bara triviala lösningen.

Viktigt underrum nr. 2: kolonnrum

Def $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A = [a_1, \dots, a_n]$, $a_k \in \mathbb{R}^m$.

A:s kolonnrum är

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\{a_1, \dots, a_n\}$$

Sats 3 $\mathrm{Col}(A)$ är underrum av $\mathbb{R}^m$.

Bevis. Sats 1

Obs * Lätt att hitta en $v \in \mathrm{Col}(A)$: bilda en linj kombination $v = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$.

* Svårt att testa om $v \in \mathrm{Col}(A)$: måste lösa $Ax = v$.

Obs * $\mathrm{Nul}(A) \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Col}(A) \in \mathbb{R}^m$

* $\mathrm{Col}(A)$ relaterad till existens av lösning.
  - $v \in \mathrm{Col}(A)$ omm $Ax = v$ har partikulärlösning
  - $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ omm $x \mapsto Ax$ är surjektiv

* $\mathrm{Nul}(A)$ är relaterad till entydighet
  - $v \in \mathrm{Nul}(A)$ omm v är homogenlösning till $Ax=b$
  - $\mathrm{Nul}(A) = \{0\} \iff x \mapsto Ax$ är injektiv

Om $m = n$ så får vi

Sats $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar omm $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^n$ eller $\mathrm{Nul}(A) = \{0\}$.

Linjära avbildningar

Def Låt V, W vara vektorrum. En avbildning $T: V \to W$ är linjär om
$$T(cu + dv) = cT(u) + dT(v).$$

Ex $T: x \mapsto Ax$ med $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ är linjär från $V = \mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$.

Def Kärnan av $T: V \to W$ är
$\ker(T) = \{u \in V : T(u) = 0\}$
(kernel) Samma som $\mathrm{Nul}(A)$ då $T: x \mapsto Ax$.

Def Värdemängden av $T: V \to W$
$\mathrm{range}(T) = \{w \in W : w = T(v), v \in V\}$
Jämför $\mathrm{Col}(A)$.

Sats $\ker(T)$ är underrum av V.
$\mathrm{range}(T)$ är underrum av W.

Ex Låt $V = \mathcal{C}^2([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R},$ 2 ggr kont. deriverbar$\}$

$W = \mathcal{C}([0,1])$

V, W är vektorrum (läsperiod 1).

$D : V \to W$, $Df = f'$ (derivatan) är linjär avbildning.

Samma för $D^2 : V \to W$, $D^2 f = f''$ (andra-derivatan)

T.ex. $f \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow Df \in \mathcal{C}$ och $D^2 f \in \mathcal{C}$ (från lp 1)

Även $D(f+g) = Df + Dg$, $D(cf) = cDf$

Obs: $V = \mathcal{C}^2$ är underrum till $W = \mathcal{C}$.

Bilda $T : V \to W$
$f \mapsto Tf = f'' + f$

$f \in \ker(T)$ betyder

$$f'' + f = 0$$

dvs $f(x) = A\cos x + B \sin x$ (lp 2)

$\ker(T) = \operatorname{span}\{\cos, \sin\}$

Motiverar andra typer av vektorrum än $\mathbb{R}^n$ och andra T än $x \mapsto Ax$

Här är V, W <u>funktionsrum</u> dvs vektorrum av funktioner och transformationen $T = D^2 + 1 : V \to W$, $f \mapsto f'' + f$, en <u>differentialoperator</u>. Ekv $Tf = 0$ är en <u>differentialekvation</u>.