

MATEMATISK ANALYS & LINJÄR ALGEBRA

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

DEL III: LINJÄR ALGEBRA

STIG LARSSON, ANDERS LOGG & AXEL MÅLQVIST

Copyright © 2019 Stig Larsson, Anders Logg & Axel Målqvist

Kopiering förbjuden

Detta verk är skyddat av lagen om upphovsrätt. Ingen del av detta verk får reproduceras eller kopieras utan rättighetsinnehavarens skriftliga medgivande.

Art. No xxxxx

ISBN xxx-xx-xxxx-xx-x

Utgåva 0.0

Omslagsdesign av Anders Logg

Publicerad av Chalmers tekniska högskola

Tryckt i Göteborg

Innehåll

	Ekvationen $Ax = b$	9
1	Vektorer i rummet	11
1.1	Geometrisk vektorer	11
1.2	Vektoralgebra	12
1.3	Skalärprodukt, ortogonalitet och projektion	14
1.4	Koordinatsystem	17
1.5	Kryssprodukt	20
1.6	Räta linjen och planet	24
	Appendix A: Grekiska alfabetet	33
	Appendix B: Programmering	35
	Facit	39
	Litteratur	43

Denna bok ger en introduktion till matematisk analys och linjär algebra för teknisk högskola. Boken bygger på föreläsningssanteckningar från kurser vi föreläst på maskinprogrammet på Chalmers och vår ambition har varit att skriva en bok som ger en koncis och lättillgänglig men samtidigt rigorös beskrivning av det matematiska teoribygget, med tydliga kopplingar till modellering, beräkning, algoritmer och programmering.

Vår ambition har också varit att ge studenten en bok som kan läsas från pärm till pärm, istället för en tegelsten sprängfylld med exempel och utvikningar; därav det kompakta formatet och det relativt sparsamma utrymme som ges åt lösta exempel.

Boken är strukturerad i fyra delar, med avsikt att varje del kan läsas som en 7,5 poängskurs. Varje del är i sin tur indelad i åtta kapitel, ett kapitel för vardera av Chalmers åtta läsveckor. De olika delarnas teman motiveras utifrån *ekvationslösning* som är ett centralt verktyg inom modellering och problemlösning i naturvetenskaperna och ingenjörskonsten. Upplägget kan därför sägas vara *problemmotiverat*. Varje del motiveras utifrån vår vilja att kunna lösa en viss klass av ekvationer: $f(x) = 0$ (skalära icke-linjära ekvationer; del I), $u' = f$ (integraler och ordinära differentialekvationer; del II), $Ax = b$ (system av linjära ekvationer; del III) och $A(u) = f$ (system av icke-linjära partiella differentialekvationer; del IV). Dessa teman bildar en röd tråd som löper genom texten, men notera att även om upplägget är problemmotiverat så är det *inte* problembaserat. Texten följer istället en traditionellt matematisk beskrivning med definition, sats och bevis. Den som så önskar kan därför välja att istället tänka på bokens olika delar som differentialkalkyl (del I), integralkalkyl (del II), linjär algebra (del III) och flervariabelanalys (del IV).

Bokens övningsuppgifter är indelade i “Övningar”, “Problem” och “Datorövningar”. Övningarna är “enkla” standarduppgifter på specifika teman och avsedda för kunskapskontroll och mängdträning, medan problemen kombinerar olika teman och kan kräva mer eftertanke. Datorövningarna innebär matematisk problemlösning med hjälp av dator (programmering). Dessa övningar kan utföras i vilket som helst programmeringsspråk och lösningar finns för såväl Python som MATLAB.

Avsnitt märkta med  lämpar sig för självstudier och kan läsas översiktligt. Bevis och övningar märkta med ★ är av lite mer utmanande karaktär och ingår normalt inte i en standardkurs för godkänt betyg. I övrigt är rekommendationen att läsa (och förstå!) boken i sin helhet och att arbeta flitigt med bokens övningar, problem och datorövningar. En lämplig omfattning kan vara att göra hälften av alla uppgifter; gör alla övningsuppgifter märkta (a) och (b) samt alla udda problem och datorövningar. Resterande uppgifter kan fungera som extra träning eller repetitionsmaterial inför tentamen.

Lycka till!

Författarna

Göteborg, 2 februari 2019

Tack!

Stort tack till de många studenter, övningsledare och kollegor som har läst, kommenterat och korrigerat tidiga utkast av boken: Robert Forslund, Tomas Forssmark, Hussein Hamoodi, Felix Held, Carl Lundholm, Douglas Molin, Raad Salman och Joel Sjögren. Speciellt tack till Joar Axås och Christoffer Hansson som bidragit med många av bokens övningsuppgifter.

Ekvationen $Ax = b$

Läsperioden kan sägas handla om att lösa linjära ekvationssystem på formen $Ax = b$.

Introduktion

Linjära ekvationssystem kan skrivas på formen $Ax = b$. Här är A en matris och x och b vektorer av tal.

Linjär algebra handlar om hur man räknar med matriser och vektorer av allmän dimension. Innan vi börjar med detta ska vi studera vektorer i det vanliga 3-dimensionella rummet. Eftersom dessa definieras som riktade sträckor kallar vi dem *geometriska vektorer*. Med hjälp av dem kan vi studera geometri i rummet, till exempel, avstånd, vinkel, ortogonal projektion, area, volym, rät linje och plan. De spelar även en viktig roll i mekanik och fysik: kraftvektor, hastighetsvektor, rotationsvektor, elektrisk fältvektor, och så vidare.

1. Vektorer i rummet

1.1	Geometriska vektorer	11
1.2	Vektoralgebra	12
1.3	Skalärprodukt, ortogonalitet och projektion	14
1.4	Koordinatsystem	17
1.5	Kryssprodukt	20
1.6	Räta linjen och planet	24

Vi studerar vektorer i rummet. Dessa kan vara geometriska vektorer, det vill säga riktade sträckor mellan punkter i rummet, men också fysikaliska vektorer såsom hastighet, kraft, elektriskt eller magnetiskt fält. Det gemensamma för dessa är att de karakteriseras endast av sin riktning och sin magnitud (längd). En annan gemensam sak är hur man kan räkna med vektorer: man kan addera vektorer och man kan multiplicera vektorer med tal och på så sätt bilda nya vektorer. Vi ska också införa skalärprodukt och kryssprodukt av vektorer. Genom att införa ett Cartesiskt koordinatsystem i rummet kan vi identifiera geometriska vektorer med vektorer i $\mathbb{R}^3$. Slutligen ska vi använda geometriska vektorer för att härleda ekvationer för den räta linjen och för planet. I senare kapitel ska vi generalisera till vektorer i n dimensioner, det vill säga vektorer i $\mathbb{R}^n$.

1.1 Geometriska vektorer

Vi börjar med att definiera geometriska vektorer som riktade sträckor i rummet.

Definition 1.1 (Geometrisk vektor) Med en geometrisk vektor menas en riktad sträcka, det vill säga en sträcka med en bestämd genomloppsriktning. Den riktade sträckan från punkten A till punkten B tecknas $\overrightarrow{AB}$.

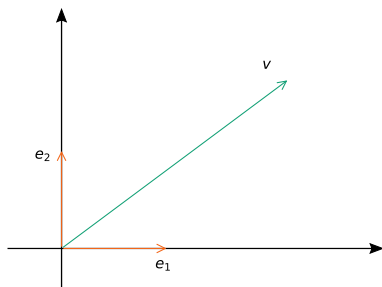
Längd. Avståndet mellan A och B kallas längden av vektorn $\overrightarrow{AB}$ och tecknas $|\overrightarrow{AB}|$.

Likhet. Två vektorer $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ sägs vara lika, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, om $\overrightarrow{AB}$ kan parallellförflyttas så att den sammanfaller med $\overrightarrow{CD}$.

Nollvektorn. En vektor med samma start- och slutpunkt, $\overrightarrow{AA}$, kallas nollvektor. Alla nollvektorer är lika, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

Motsatt vektor. Den motsatta vektorn till $\overrightarrow{AB}$ är vektorn $\overrightarrow{BA}$, vilken tecknas $-\overrightarrow{AB}$.

En geometrisk vektor bestäms alltså entydigt av sin längd och sin riktning, men inte av sitt läge i



Figur 1.1: Geometriska vektorer

rummet. Två vektorer som har samma riktning eller motsatt riktning (utan att nödvändigtvis ha samma längd), dvs som är parallella eller antiparallella, kallas *kolinjära*.

Vi skriver ofta vektorer med fetstil, till exempel, $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$. Nollvektorn tecknas $\mathbf{0}$ och den motsatta vektorn till $\mathbf{u}$ tecknas $-\mathbf{u}$. Notera att $|- \mathbf{u}| = |\mathbf{u}|$ och att nollvektorn är den enda vektor vars längd är 0, det vill säga, $|\mathbf{u}| = 0$ om och endast om $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Ibland skriver vi vektorns längd med vanlig stil, $u = |\mathbf{u}|$.

Exempel 1.1 (Fysiska vektorer) En geometrisk vektor $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ är en riktad sträcka i rummet och dess magnitud är därför en längd med SI-enhet meter, $u = |\mathbf{u}|$ [m]. Hastighet $\mathbf{v}$ är en vektorkvantitet vars magnitud mäts i meter per sekund och kallas fart, $v = |\mathbf{v}|$ [m/s]. Kraft $\mathbf{F}$ är en vektor vars magnitud mäts i newton, $F = |\mathbf{F}|$ [N].

1.2 Vektoralgebra

Vektorer adderas genom att man parallellförflyttar den andra vektorn till spetsen av den första och tar den riktade sträckan som bildas.

Definition 1.2 (Addition av geometriska vektorer) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer och välj punkter A, B, C så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$. Vektorn $\overrightarrow{AC}$ kallas summan av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och tecknas $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Med hjälp av den motsatta vektorn kan vi definiera *subtraktion* av vektorer: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Sats 1.1 (Räknerregler för addition)

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad (\text{associativa lagen för addition}) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad (\text{kommutativa lagen för addition}) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \quad (\text{nollvektorn}) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (\text{motsatta vektorn}) \quad (1.4)$$

Bevis. Bevis av (1.1). Välj punkter så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{CD}$. Då fås

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

Bevis av (1.2). Välj nu punkter så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Då bildar punkterna en parallelogram $ABCD$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Vi får

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

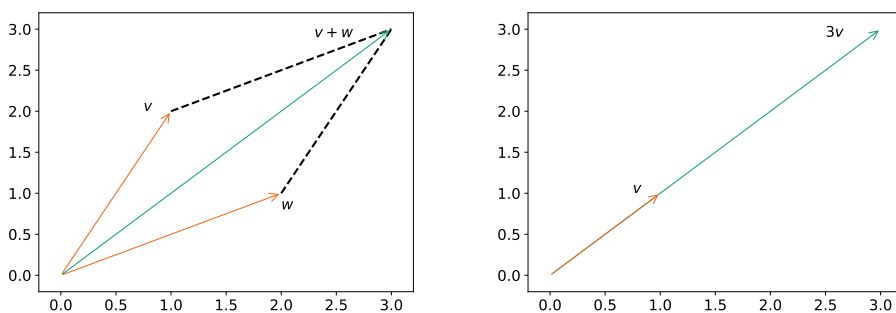
Bevis av (1.3).

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$$

Bevis av (1.4).

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$$

□



Figur 1.2: Summan av två vektorer (vänster) och multiplikation med skalär (höger).

Definition 1.3 (Multiplikation med skalär) Låt $\mathbf{u}$ vara en vektor och t en skalär, det vill säga, ett reellt tal. Då är produkten $t\mathbf{u}$ den unika vektor som har längden $|t\mathbf{u}| = |t||\mathbf{u}|$ och som är parallell med $\mathbf{u}$ om $t > 0$ och antiparallell med $\mathbf{u}$ om $t < 0$.

Notera att i uttrycket $|t||\mathbf{u}|$ är $|t|$ absolutbeloppet av ett tal medan $|\mathbf{u}|$ är längden av en vektor.

Sats 1.2 (Räkneregler för multiplikation med skalär)

$$t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad (\text{distributiv lag}) \quad (1.5)$$

$$(t + s)\mathbf{u} = t\mathbf{u} + s\mathbf{u} \quad (\text{distributiv lag}) \quad (1.6)$$

$$t(s\mathbf{u}) = (ts)\mathbf{u} \quad (\text{associativ lag}) \quad (1.7)$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (1.8)$$

$$(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u} \quad (1.9)$$

$$0\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.10)$$

Bevis. Vi lämnar beviset till problem 1.2. □

Vektorn

$$\mathbf{w} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad (1.11)$$

kallas *linjär kombination* av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ med koefficienterna s och t . Linjär kombination är ett viktigt sätt att bilda nya vektorer.

En vektor som inte är nollvektorn, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, kan *normeras* genom att man multiplicerar med $1/|\mathbf{u}|$,

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}. \quad (1.12)$$

Den normerade vektorn $\hat{\mathbf{u}}$ har samma riktning som $\mathbf{u}$ men längden 1, $|\hat{\mathbf{u}}| = 1$. En sådan vektor kallas *enhetsvektor*.

1.3 Skalärprodukt, ortogonalitet och projektion

Definition 1.4 (Skalärprodukt) Den skalära produkten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ definieras av

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\theta) \quad (1.13)$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Notera att skalärprodukten skrivs med en prick, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Uttrycket $\mathbf{uv}$ har ingen mening.

Sats 1.3 (Räknerregler för skalärprodukt)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{kommutativ lag}) \quad (1.14)$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \quad (\text{distributiv lag}) \quad (1.15)$$

$$(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (t\mathbf{v}) \quad (\text{distributiv lag}) \quad (1.16)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 \quad (1.17)$$

Bevis. Bevisen av (1.14), (1.16), (1.17) följer omedelbart av definitionen i (1.13). För (1.16) noterar vi då att vinkeln mellan $t\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $\pi - \theta$ då $t < 0$ och att $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$. Distributiva lagen (1.15) bevisar vi senare med hjälp av ortogonal projektion som vi strax ska introducera. $\square$

Skalärproduktens tecken indikerar vinkelns typ. Antag att $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Vi har tre fall:

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$. Då är $\cos(\theta) > 0$, dvs $0 \leq \theta < \pi/2$, och vektorerna bildar en *spetsig vinkel*.
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Då är $\theta = \pi/2$ och vektorerna bildar en *rät vinkel*.
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$. Då är $\cos(\theta) < 0$, dvs $\pi/2 < \theta \leq \pi$, och vektorerna bildar en *trubbig vinkel*.

Fallet med rät vinkel är så viktigt att vi gör en definition.

Definition 1.5 (Ortogonal vektorer) Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ kallas *ortogonal* om

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.18)$$

Vi noterar att nollvektorn per definition är ortogonal mot alla vektorer.

Antag $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och bilda enhetsvektorn $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$. I figur ?? vi ser att talet $|\mathbf{v}| \cos(\theta)$ är den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$. Men vi har ju $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos(\theta)$ och projektionen ges alltså av

$$|\mathbf{v}| \cos(\theta) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}}. \quad (1.19)$$

Projektionen är en skalär som kan vara positiv, negativ eller 0 beroende på vinkeln. Om vi multiplicerar den med enhetsvektorn $\hat{\mathbf{u}}$ får vi en vektor $(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}$ som är parallell eller antiparallell med $\mathbf{u}$ och vars längd är lika med absolutbeloppet av den skalära projektionen.

Definition 1.6 (Ortogonal projektion) Antag $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och bilda enhetsvektorn $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$. Den skalära projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$ är

$$\text{sproj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (1.20)$$

Vektorprojektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$ är

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} \quad (1.21)$$

Vi kan nu bevisa distributiva lagen (1.15) för skalär produkt:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}. \quad (1.22)$$

Från (1.20) ser vi att alla tre termerna är lika med $|\mathbf{u}|$ gånger respektive skalära projektion på $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \text{sproj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}), \quad (1.23)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{u}| \text{sproj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}), \quad (1.24)$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = |\mathbf{u}| \text{sproj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} + \mathbf{w}). \quad (1.25)$$

Men

$$\text{sproj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \text{sproj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) + \text{sproj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}), \quad (1.26)$$

se figur ??, varav (1.22) följer.

Exempel 1.2 (Arbete) En kropp förflyttas längs den riktade sträckan $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ [m] under inverkan av en kraft $\mathbf{F}$ [N]. Arbetet som uträttas blir då lika med skalära projektionen av kraften gånger den tillryggalagda sträckan $|\mathbf{u}|$, se figur ??:

$$W = |\mathbf{u}| |\mathbf{F}| \cos(\theta) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad [\text{J}] \quad (1.27)$$

Arbetet ges helt enkelt som skalärprodukten av kraften och den riktade sträckan. Arbetet kan vara positivt, negativt eller noll beroende på tecknet på $\cos(\theta)$, dvs beroende på hur kraften är riktad i förhållande till rörelsen. (Enheten är joule=newtonmeter J=Nm.)

Sambandet (1.17), $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, är mycket användbart vilken följande två exempel visar.

Exempel 1.3 (Beräkna längd) Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har längderna 2 respektive 3 och bildar vinkeln $\pi/3$. Beräkna längden av vektorn $\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$.

Vi använder (1.17) och utvecklar kvadraten med hjälp av räkneregler:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - 5\mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u} - 5\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - 5\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (-5\mathbf{v}) + (-5\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} + (-5\mathbf{v}) \cdot (-5\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 10\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + 25\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= |\mathbf{u}|^2 - 10\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + 25|\mathbf{v}|^2 \\ &= |\mathbf{u}|^2 - 10|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos(\pi/3) + 25|\mathbf{v}|^2 \\ &= 4 - 60 \cos(\pi/3) + 225 = 4 - 30 + 225 = 199 \end{aligned}$$

Alltså: $|\mathbf{u} - 5\mathbf{v}| = \sqrt{199}$.

Exempel 1.4 (Cosinussatsen) En triangel har sidor med längderna a, b, c och vinkeln mellan sidorna a och b är θ . Då gäller

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta) \quad (1.28)$$

Bevis: Bilda vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ längs de tre sidorna så att $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ och $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$, $c = |\mathbf{c}|$. Då fås

$$c^2 = |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)$$

Exempel 1.5 (Uppdelning i ortogonala komponenter) Antag $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Varje vektor $\mathbf{v}$ kan delas upp i två unika komponenter, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, där $\mathbf{v}_1$ är parallell/antiparallell med $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$. Komponenterna är $\mathbf{v}_1 = \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}}$ och $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$.

Bevis: Att $\mathbf{v}_1$ är parallell/antiparallell med $\mathbf{u}$ betyder att $\mathbf{v}_1 = t\mathbf{u}$ för någon skalär t . Vi bestämmer t så att $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - t\mathbf{u}$ blir ortogonal mot $\mathbf{u}$, dvs

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{v} - t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - t\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - t|\mathbf{u}|^2 \\ t &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \end{aligned}$$

Alltså:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= t\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

1.4 Koordinatsystem

Vi inför nu ett koordinatsystem i rummet. Det består av tre axlar som är parvis ortogonala och som skär varandra i en punkt O , som kallas origo. Axlarna kallas x -, y - och z -axlarna. På respektive axel placerar vi enhetsvektorer $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ som pekar ut från origo och definierar en positiv riktning till respektive axel. Dessa vektorer kallas *basvektorer*. Ett sådant koordinatsystem med ortogonala och normerade basvektorer kallas *Cartesiskt*. Vi antar dessutom att det utgör ett *högersystem*, dvs z -axeln är riktad i den riktning som en högergängad skruv rör sig då man vrider den kortaste vägen från x -axeln till y -axeln. Alternativt kan man säga att x -, y - och z -axlarna är orienterade så som tumme, pekfinger respektive långfinger på höger hand. Vi har alltså ett Cartesiskt högersystem.

Att basvektorerna är ortogonala och normerade, eller kortfattat *ortonormerade*, kan formuleras så här:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 & (\text{normerade}) \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0 & (\text{ortogonala}) \end{aligned} \tag{1.29}$$

Vi ska nu dela upp en godtycklig vektor i komponenter längs basvektorerna. Att vektorer kan uttryckas på detta vis med precis tre basvektorer innebär att rummet är tre-dimensionellt.

Sats 1.4 (Uppdelning i komponenter) Varje vektor kan skrivas

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z \quad (1.30)$$

där skalärerna u_x, u_y, u_z , är unika.

Vektorerna $u_x \mathbf{e}_x, u_y \mathbf{e}_y, u_z \mathbf{e}_z$ kallas *komponenter* medan talen (koefficienterna) u_x, u_y, u_z kallas *komponenter*.

Bevis. Vi visar först att sådana tal finns. Låt $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, dvs den riktade sträckan från origo till någon punkt A . Dra sedan en rät linje genom A parallellt med z -axeln. Den skär xy -planet i en punkt B . Genom B drar vi räta linjer parallella med x -axeln respektive y -axeln som skär axlarna i punkter C respektive D . Då har vi

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$$

Eftersom $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}$ är parallella/antiparallella med basvektorerna $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$, respektive $\mathbf{e}_z$, så finns tal u_x, u_y, u_z sådana att

$$\overrightarrow{OC} = u_x \mathbf{e}_x, \quad \overrightarrow{CB} = u_y \mathbf{e}_y, \quad \overrightarrow{BA} = u_z \mathbf{e}_z$$

och (1.30) följer.

För att visa att talen är unika antar vi att (1.30) gäller. Vi bildar skalärprodukten av (1.30) med $\mathbf{e}_x$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x = u_x \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x + u_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = u_x$$

där vi använde att basvektorerna är ortonormerade, (1.29). Alltså:

$$u_x = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x = \text{proj}_{\mathbf{e}_x}(\mathbf{u}).$$

På liknande sätt får vi

$$u_y = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y = \text{proj}_{\mathbf{e}_y}(\mathbf{u})$$

$$u_z = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z = \text{proj}_{\mathbf{e}_z}(\mathbf{u})$$

Talen är alltså entydigt bestämda. □

Om man har valt ett koordinatsystem så är det praktiskt att skriva vektorer med hjälp av komponenter, dvs vi skriver kortfattat

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) \quad (1.31)$$

istället för att skriva med komponenter $\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z$. Skrivsättet (1.31) innebär att vi identifierar vektorn med en taltrippel, $(u_x, u_y, u_z) \in \mathbb{R}^3$. I senare kapitel ska vi arbeta med vektorer i n dimensioner, dvs i $\mathbb{R}^n$.

Vi ska nu se hur man räknar med komponenter.

Sats 1.5 (Komponentvis räkning)

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z) = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z) \quad (1.32)$$

$$t\mathbf{u} = t(u_x, u_y, u_z) = (tu_x, tu_y, tu_z) \quad (1.33)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_x, u_y, u_z) \cdot (v_x, v_y, v_z) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \quad (1.34)$$

$$|\mathbf{u}| = |(u_x, u_y, u_z)| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \quad (1.35)$$

Bevis. Bevisen av (1.32) och (1.33) lämnas som övning åt läsaren, se problem 1.9. För (1.34) använder vi (1.29):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z) \cdot (v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

För (1.35) använder vi $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ och tar $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ i (1.34). □

Exempel 1.6 (Räkning med komponenter) Låt $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ och $\mathbf{v} = (-4, 5, 6)$. Vi har då

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}, \quad (1.36)$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77} \quad (1.37)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -4 + 10 + 18 = 24 \quad (1.38)$$

Vinkeln ges då av sambandet $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos(\theta)$:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{24}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{77}}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{24}{\sqrt{1078}}\right) \quad (1.39)$$

Den normerade vektorn är

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) \quad (1.40)$$

Projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$ ges av

$$\text{sproj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}} = (-4, 5, 6) \cdot \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}} = \frac{24}{\sqrt{14}} \quad (1.41)$$

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = \left((-4, 5, 6) \cdot \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}}\right) \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}} \quad (1.42)$$

$$= \frac{24}{14}(1, 2, 3) = \left(\frac{12}{7}, \frac{24}{7}, \frac{36}{7}\right) \quad (1.43)$$

För att ange läget för en punkt P bildar vi dess *ortsvektor* $\overrightarrow{OP}$. Efter uppdelning i komponenter har vi

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (1.44)$$

där vi kallar komponenterna x, y, z . Dessa kallas *koordinater* för punkten P och vi skriver kortfattat

$$P = (x, y, z) \quad (1.45)$$

Koordinaterna för punkten P är detsamma som komponenterna för Ortsvektorn $\overrightarrow{OP}$. Vi betecknar ofta Ortsvektorn med $\mathbf{r}$, dvs

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z) \quad (1.46)$$

Exempel 1.7 (Räkning med koordinater) Låt $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vara två punkter. Då gäller

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad (1.47)$$

och avståndet mellan P_1 och P_2 ges av

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1.48)$$

Bevis: Genom att gå via origo får vi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{P_1O} + \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \\ &= (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \end{aligned}$$

Avståndsformeln följer nu direkt av $d = |\overrightarrow{P_1P_2}|$ och (1.35).

1.5 Kryssprodukt

Definition 1.7 (Kryssprodukt) Kryssprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är den unika vektor som definieras av villkoren:

- Längden är

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin(\theta) \quad (1.49)$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

- Vektorn $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och riktad i den riktning som en högergängad skruv rör sig då den vrids kortaste vägen från $\mathbf{u}$ till $\mathbf{v}$.

Till skillnad från skalärprodukten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, som är en skalär, är kryssprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ en vektor. Den kallas därför också *vektoriell produkt*. Vi erinrar oss att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala, ty då är $\cos(\theta) = 0$. På liknande sätt ser vi från (1.49) att om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella eller antiparallella så är $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, ty då är $\sin(\theta) = 0$. Till skillnad från $\cos(\theta)$, som byter tecken, är $\sin(\theta) \geq 0$ för $\theta \in [0, \pi]$.

Vi noterar också att vi behöver alla tre dimensionerna för att definiera kryssprodukten. Om både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ligger i xy -planet, så blir $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ parallell/antiparallell med z -axeln, dvs den ligger utanför xy -planet.

Sats 1.6 (Räkneregler för kryssprodukt)

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \quad (\text{antikommutativitet}) \quad (1.50)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.51)$$

$$(t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v}) \quad (\text{distributiv lag}) \quad (1.52)$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} \quad (\text{distributiv lag}) \quad (1.53)$$

Bevis. Reglerna (1.50), (1.51), (1.52) följer lätt från definition 1.7 och lämnas som övning. Beviset av distributiva lagen (1.53) är krångligare och vi utelämnar det. $\square$

Sambandet (1.50) betyder att kommutativa lagen inte gäller för kryssprodukten, istället är den *antikommutativ*. Inte heller associativa lagen gäller, dvs i allmänhet har vi

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad (1.54)$$

se problem 1.11.

Exempel 1.8 (Area av parallelogram) Antag att vektorerna $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Då spänner de upp en parallelogram vars area ges av basen $|\mathbf{u}|$ gånger höjden $|\mathbf{v}| \sin(\theta)$, dvs $|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin(\theta)$. Arealen ges alltså av formeln

$$A = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \quad (1.55)$$

dvs längden av kryssprodukten. Vektorn $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot parallelogrammen, den kallas därför *normalvektor*. Även den motriktade vektorn $-(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ är en normalvektor.

Exempel 1.9 (Volym av parallelepiped) Antag att vektorerna $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Då spänner de upp en parallelepiped vars volym ges av basytan gånger höjden $V = hA$. Vi låter A vara arean av parallelogrammen som spänns upp av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$, dvs

$$A = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \quad (1.56)$$

Vektorn $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ är ortogonal mot basytan och bildar en vinkel θ med vektorn $\mathbf{u}$. Om vinkeln är spetsig, dvs $\cos(\theta) \geq 0$, så är höjden den skalära projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$,

$$h = |\mathbf{u}| \cos(\theta) \quad (1.57)$$

och volymen blir

$$V = |\mathbf{u}||\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \cos(\theta) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad (1.58)$$

Om vinkeln är trubbig, dvs $\cos(\theta) \leq 0$, så blir höjden $h = -|\mathbf{u}| \cos(\theta)$ och volymen

$$V = -|\mathbf{u}||\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \cos(\theta) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad (1.59)$$

Vi drar slutsatsen att volymen i båda fallen ges av absolutbeloppet av $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$,

$$V = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \quad (1.60)$$

Produkten $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ kallas *skalär trippelprodukt* och har intressanta egenskaper men vi följer inte upp detta här.

Det är nödvändigt att veta hur man utvecklar kryssprodukten i komponenter.

Sats 1.7 (Komponentuppdelning av kryssprodukten) Antag att $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ är basvektorer i ett Cartesiskt högersystem. Då gäller

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y) \mathbf{e}_x + (u_z v_x - u_x v_z) \mathbf{e}_y + (u_x v_y - u_y v_x) \mathbf{e}_z \quad (1.61)$$

Bevis. Med hjälp av distributiva lagen och sambanden $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ från sats 1.6 får vi

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z) \times (v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z) \quad (1.62)$$

$$= (u_y v_z - u_z v_y) \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z + (u_z v_x - u_x v_z) \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x + (u_x v_y - u_y v_x) \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y \quad (1.63)$$

Eftersom vi har ett högersystem så gäller

$$\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \quad (1.64)$$

och beviset är klart. $\square$

För att lättare komma ihåg sambandet (1.61) inför vi ett räknescema som kallas *determinant*.

En *tvåradig determinant* tecknas $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ och definieras enligt

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (1.65)$$

En *treradig determinant* tecknas och definieras

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & j \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \quad (1.66)$$

$$= a(ej - fh) - b(dj - fg) + c(dh - eg) \quad (1.67)$$

Notera hur den treradiga determinanten utvecklas i en summa av tre tvåradiga underdeterminanter multiplicerade med talen från första raden med alternerande tecken. Underdeterminanterna fås genom att stryka den rad och den kolumn som möts i respektive tal. Strecken som ingår i determinanten kallas *determinantstreck* och ska inte förväxlas med absolutbelopp eller längd.

Om vi sätter in basvektorerna i första raden och komponenterna för $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i andra respektive tredje raden, så får vi

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \mathbf{e}_x - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \mathbf{e}_z \quad (1.68)$$

$$= (u_y v_z - u_z v_y) \mathbf{e}_x - (u_x v_z - u_z v_x) \mathbf{e}_y + (u_x v_y - u_y v_x) \mathbf{e}_z \quad (1.69)$$

Detta är detsamma som (1.61). Alltså:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (1.70)$$

Exempel 1.10 (Area av triangel) De tre punkterna $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$ är hörn i en triangel. Beräkna dess area.

Triangeln spänns upp av vektorerna $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB} = (1, 2, 3)$. Dess area är hälften av arean av motsvarande parallelogram. Enligt (1.55) har vi då

$$A = \frac{1}{2} |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \quad (1.71)$$

och enligt (1.70)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (1, -2, 1) \quad (1.72)$$

Arean blir $A = \frac{1}{2} \sqrt{6}$.

Exempel 1.11 (Volym av tetraeder) De fyra punkterna är $O = (0, 0, 0)$, $A = (3, -1, 2)$, $B = (4, 0, 5)$, $C = (1, 3, 2)$ är hörn i en tetraeder. Beräkna dess volym.

Tetraedern spänns upp av vektorerna $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA} = (3, -1, 2)$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB} = (4, 0, 5)$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{OC} = (1, 3, 2)$. Dess volym är en sjättedel av volymen av motsvarande parallelepiped, se även problem 1.12. Enligt (1.60) har vi då

$$V = \frac{1}{6} |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \quad (1.73)$$

och enligt (1.70) (se även problem 1.13)

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-15, -3, 12) \quad (1.74)$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (3, -1, 2) \cdot (-15, -3, 12) = -18 \quad (1.75)$$

Volymen blir $V = \frac{1}{6} |-18| = 3$.

1.6 Räta linjen och planet

Vi ska nu bestämma ekvationer för räta linjen och planet. Vi använder ett Cartesiskt högersystem. En rät linje i rummet bestäms entydigt om man anger en punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ på linjen och en *riktningsvektor* $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ som pekar ut linjens riktning. En punkt $P = (x, y, z)$ ligger på linjen om och endast om vektorn $\overrightarrow{P_0P}$ är parallell eller antiparallell med $\mathbf{v}$, dvs om det finns ett tal t så att $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$. Men $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ där $\mathbf{r}$ och $\mathbf{r}_0$ punkternas Ortsvektorer. Alltså har vi $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$ eller

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < \infty \quad (1.76)$$

eller med koordinater

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x, \\ y = y_0 + tv_y, \\ z = z_0 + tv_z, \end{cases} \quad -\infty < t < \infty \quad (1.77)$$

Ekvationerna (1.76) och (1.77) kallas *räta linjens ekvationer på parameterform* skrivna på vektorform respektive koordinatform. När parametern t genomlöper intervallet $(-\infty, \infty)$ genomlöper punkten P den räta linjen.

Genom att eliminera parametern t ur (1.77) får vi *räta linjens ekvationer på parameterfri form*

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z} \quad (= t) \quad (1.78)$$

förutsatt att alla komponenter v_x, v_y, v_z skilda från 0. Om en av dem är 0, till exempel $v_z = 0$, så får vi istället

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y}, \quad z = z_0 \quad (1.79)$$

Exempel 1.12 (Räta linjen genom två punkter) Bestäm ekvationer för den räta linjen som går genom punkterna $A = (1, 2, 3)$ och $B = (3, 2, 1)$.

Vi väljer $P_0 = A$ och en riktningsvektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (3, 2, 1) - (1, 2, 3) = (2, 0, -2)$. Vi får

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2, \\ z = 3 - 2t, \end{cases} \quad -\infty < t < \infty \quad (1.80)$$

Efter elimination av t :

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{z - 3}{-2}, \quad y = 2 \quad (1.81)$$

Exempel 1.13 (Skärning mellan två linjer) Visa att linjerna $x = y - 1 = (z + 1)/2$ och $(x - 3)/2 = (y - 1)/(-1) = z - 2$ skär varandra och bestäm skärningspunkten.

Vi skriver linjerna på parameterform:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = 1 - s \\ z = 2 + s \end{cases} \quad (1.82)$$

Obs att vi måste använda olika parametrar t och s . Vi likställer x, y, z -koordinaterna och får ekvationssystemet

$$\begin{cases} t = 3 + 2s \\ 1 + t = 1 - s \\ -1 + 2t = 2 + s \end{cases} \quad (1.83)$$

Vi har 3 ekvationer i 2 obekanta. Det är inte självklart att det finns någon lösning. Vi undersöker. Den andra ekvationen ger $t = -s$, vilket sättes in i den första ekvationen: $-s = 3 + 2s$ och vi får $s = -1$ och sedan $t = -s = 1$. Dessa måste uppfylla även den tredje ekvationen. Vi sätter in: $-1 + 2t = -1 + 2 = 1$ och $2 + s = 2 - 1 = 1$, vilket stämmer. Vi har en unik lösning: $t = 1, s = -1$. Med dessa parametervärden får vi $x = 1, y = 2, z = 1$, dvs skärningspunkten $P = (1, 2, 1)$.

I nästa kapitel ska vi lära oss en systematisk metod för att undersöka lösbarheten för sådana ekvationssystem.

Vi går nu över till planet. Ett plan bestäms entydigt om man anger en punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i planet och en *normalvektor* $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z)$ som är ortogonal mot planet. En punkt $P = (x, y, z)$ är i planet om och endast om vektorn $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \overrightarrow{P_0P}$ är ortogonal mot normalvektorn $\mathbf{N}$. Detta ger ekvationen

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad (1.84)$$

Uttryckt i komponenter blir detta:

$$N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) + N_z(z - z_0) = 0 \quad (1.85)$$

Denna ekvation kan också skrivas på formen

$$Ax + By + Cz = D \quad (1.86)$$

där $A = N_x, B = N_y, C = N_z, D = N_x x_0 + N_y y_0 + N_z z_0$.

Det är viktigt att kunna känna igen planets ekvation (1.85) eller (1.86). Till exempel, om man ser en ekvation på formen (1.86) så ska man förstå att detta är ekvationen för ett plan med normalvektor $\mathbf{N} = (A, B, C)$ och som går genom punkten P_0 , som man får genom att välja två av x_0, y_0, z_0 och räkna ut den tredje ur (1.86).

Exempel 1.14 (Plan genom tre punkter) Bestäm en ekvation för planet som går genom punkterna $A = (1, 1, 1), B = (1, 2, 3), C = (-1, 2, 1)$.

Vektorerna $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3) - (1, 1, 1) = (0, 1, 2)$ och $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1) - (1, 1, 1) = (-2, 1, 0)$ ligger i planet och vektorn $\mathbf{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ är en normalvektor. Vi beräknar den

med determinantformeln (1.70):

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \cdots = (-2, -4, 2) \quad (1.87)$$

Planets ekvation blir då

$$-2(x-1) - 4(y-1) + 2(z-1) = 0 \quad (1.88)$$

Här kan man genast avläsa en normalvektor $\mathbf{N} = (-2, -4, 2)$ och en punkt i planet $A = (1, 1, 1)$. Eventuellt kan man vilja förenkla till

$$x + 2y - z = 2 \quad (1.89)$$

Ur denna ekvation kan man direkt avläsa att $\mathbf{N}_1 = (1, 2, -1)$ är en normalvektor. Denna är antiparallell med $\mathbf{N}$, ty $\mathbf{N}_1 = -2\mathbf{N}$, och vi inser att planets normalvektor är inte unik. En punkt i planet skulle man kunna finna genom att sätta in $x_0 = y_0 = 0$ i (1.89) och räkna ut $z_0 = -2$. Alltså är $P_0 = (0, 0, -2)$ en punkt i planet (i tillägg till de punkter vi startade med).

Övningar

1.1 Geometrisk vektorer

Övning 1.1 Illustrera med en figur.

(a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (b) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ (c) $\overrightarrow{AA}$ (d) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

1.2 Vektoralgebra

Övning 1.2 Illustrera vektorerna med vektordiagram som i figur 1.2.

(a) $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ (c) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (d) $\mathbf{u} + \mathbf{v} - (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}$

1.3 Skalärprodukt, ortogonalitet och projektion

Övning 1.3 Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har längderna 2 respektive 3 och bildar vinkeln θ . Beräkna längden av vektorn $\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$.

(a) $\theta = \pi/6$ (b) $\theta = \pi/2$ (c) $\theta = \pi/4$ (d) $\theta = \pi$

Övning 1.4 Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har längderna 2 respektive 3 och bildar vinkeln θ . Beräkna skalära projektionen och vektorprojektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

(a) $\theta = \pi/6$ (b) $\theta = \pi/2$ (c) $\theta = \pi/4$ (d) $\theta = \pi$

Övning 1.5 Vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ har längderna 3, 4 respektive 2. Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

1.4 Koordinatsystem

Övning 1.6 Låt $\mathbf{u} = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$ och $\mathbf{w} = (4, 5, 6)$. Beräkna följande.

(a) $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ (c) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (d) $\hat{\mathbf{v}}$

Övning 1.7 Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $2\mathbf{v} - \mathbf{u}$, då $\mathbf{u} = (2, -3, 4)$ och $\mathbf{v} = (3, 4, 0)$.

Övning 1.8 Bestäm t så att vektorerna $(t, 2t^2, 3t)$ och $(-1, 1, t)$ blir ortogonala.

Övning 1.9 Normera vektorn.

(a) $(1, 1, 1)$ (b) $(0, 0, 0)$ (c) $(-1, 1, -1)$ (d) $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

Övning 1.10 Låt $\mathbf{u} = (-1, 2, 3)$ och $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$.

- (a) Beräkna längderna av vektorerna.
- (b) Beräkna skalärprodukten mellan vektorerna.
- (c) Beräkna vinkeln mellan vektorerna.
- (d) Beräkna vektorprojektion av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$.

Övning 1.11 Dela upp vektorn $\mathbf{u}$ i ortogonala komponenter där den ena är parallell/anti-parallell med $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$.

- (a) $\mathbf{u} = (0, 1, 1)$ (b) $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$

Övning 1.12 Beräkna vinkeln vid hörnet A i triangeln med hörnen $A = (2, -1, 3)$, $B = (3, 1, 1)$, $C = (4, 3, 2)$.

Övning 1.13 Avgör om vinkeln mellan vektorerna är rät, trubbig eller spetsig.

- (a) $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (3, 4, 1)$
- (b) $\mathbf{u} = (2, 4, 1)$, $\mathbf{v} = (-3, 2, -2)$
- (c) $\mathbf{u} = (2, 0, 3)$, $\mathbf{v} = (-2, 5, 1)$
- (d) $\mathbf{u} = (1, t, 2)$, $\mathbf{v} = (-4t, 2, 3)$

1.5 Kryssprodukt

Övning 1.14 Antag att $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 4$ och att vinkeln mellan vektorerna är θ . Beräkna längden av $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

- (a) $\theta = 0$ (b) $\theta = \pi/6$ (c) $\theta = \pi/2$ (d) $\theta = \pi$

Övning 1.15 Beräkna arean av triangeln med hörnen i punkterna A, B, C .

- (a) $A = (1, 3, 2)$, $B = (0, -1, 1)$, $C = (2, -1, 2)$
- (b) $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, -3, 1)$, $C = (3, 1, 2)$

Övning 1.16 Beräkna volymen av tetraedern med hörnen $A = (2, 2, 1)$, $B = (4, 2, 1)$, $C = (3, 5, 1)$, $D = (3, 3, 2)$. Tips: problem 1.12.

Övning 1.17 Bestäm alla enhetsvektorer $\hat{\mathbf{N}}$ som är ortogonala mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

- (a) $\mathbf{u} = (1, -3, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -3)$ (b) $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$

Övning 1.18 En kraft $\mathbf{F}$ angriper i punkten P . Kraftens vridmoment kring punkten A är $\mathbf{M} = \overrightarrow{AP} \times \mathbf{F}$. Beräkna vridmomentet.

$\mathbf{F} = (4, 1, -3)$ [N], $P = (2, -3, 1)$, $A = (0, 1, 2)$ [m]

1.6 Räta linjen och planet

Övning 1.19 Bestäm ekvationen för den räta linjen som går genom punkterna A och B . Skriv ekvationen dels på parameterform (1.76) och dels på parameterfri form (1.77).

(a) $A = (1, 3, 2)$, $B = (0, -1, 1)$ (b) $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, -3, 1)$ (c) $A = (2, 2, 3)$, $B = (2, -3, 1)$

Övning 1.20 Bestäm de punkter på räta linjen i övning 1.19 som ligger på avståndet 1 från punkten A .

Övning 1.21 Skriv z -axelns ekvation på parameterform.

Övning 1.22 Ange en riktningsvektor och en punkt på den räta linjen.

(a) $\frac{x-1}{3} = y-2 = \frac{z+3}{-2}$

(b) $\begin{cases} x = 2, \\ y = 2 - 5t, \\ z = -3 + 4t, \end{cases} \quad -\infty < t < \infty$

(c) $2x = y + 1 = 3 - 3z$

Övning 1.23 Beräkna avståndet mellan punkten $(1, 3, 2)$ och linjen $x - 1 = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{3}$. Tips: problem 1.14.

Övning 1.24 Bestäm en punkt i planet och en normalvektor till planet.

(a) $5(x+1) - 2(y-3) + z = 0$ (b) $x + 2y + 3z = 6$ (c) $x/3 - y/4 + z = 0$ (d) $11x - 4y - z = 6$

Övning 1.25 Bestäm ekvationen för planet genom punkterna $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 4)$, $(0, -2, 2)$.

Övning 1.26 Finn skärningspunkten mellan planet $x - y + 2z = 4$ och den räta linjen genom punkterna $(2, 1, 3)$ och $(4, 5, 7)$.

Problem

1.1 Geometrisk vektorer

Problem 1.1 Hitta fler exempel på fysiska vektorer som i exempel 1.1.

1.2 Vektoralgebra

Problem 1.2 Bevisa sats 1.6.

Problem 1.3 Visa att diagonalerna i en parallelogram skär varandra mitt itu.

Problem 1.4 En median i en triangel är en sträcka som förbinder ett hörn med mittpunkten på motstående sida. Visa att medianerna skär varandra i en punkt som delar medianerna i förhållandet 1:2. Punkten kallas triangelns *tyngdpunkt*.

1.3 Skalarprodukt, ortogonalitet och projektion

Problem 1.5 Bevisa Pythagoras sats med hjälp av vektorer.

Problem 1.6 Bevisa att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2)$.

Problem 1.7 Antag att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$. Följer det att $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Ge bevis eller motexempel.

Problem 1.8 Visa med vektorer att sidorna i en liksidig triangel bildar vinkeln $\pi/3$.

1.4 Koordinatsystem

Problem 1.9 Bevisa (1.32) och (1.33).

Problem 1.10 Kraften $\mathbf{F} = (3, -4, 2)$ [N] verkar på en kropp som rör sig från punkten $A = (-1, 3, 2)$ [m] till punkten B . Hur mycket ändras kroppens rörelseenergi?
(a) $B = (1, 4, 5)$ (b) $B = (-3, 2, 3)$ (c) $B = (0, 5, 3)$

1.5 Kryssprodukt

Problem 1.11 Bevisa (1.54). Tips: låt $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och låt $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ vara ortogonal mot $\mathbf{u}$.

Problem 1.12 Bevisa formeln $V = \frac{1}{6}|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$ för volymen av tetraedern som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

Problem 1.13 Visa att

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \quad (1.90)$$

Tips: använd (1.70).

1.6 Räta linjen och planet

Problem 1.14 Visa att avståndet från punkten P till den räta linjen genom punkten P_0 med riktningsvektorn $\mathbf{v}$ är

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \quad (1.91)$$

Problem 1.15 Visa att de räta linjerna $x = y - 1 = (z + 1)/2$ och $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$ skär varandra och beräkna vinkeln mellan dem.

Problem 1.16 En ljusstråle med riktningsvektorn $(1, 2, 2)$ reflekteras i planet $3x + 4y + z = 0$. Bestäm en riktningsvektor för den reflekterade strålen.

Datorövningar

Datorövning 1.1 I MATLAB kan man skriva vektorer antingen som radmatriser $\mathbf{v} = [1, 2, 3]$ eller som kolonnmatriser $\mathbf{v} = [1; 2; 3]$. Kolonnformen rekommenderas med tanke på hur vi kommer att skriva senare i boken. Gör övning 1.6 och 1.10 med MATLAB. Tips: I MATLAB beräknar man lätt skalärprodukt med $\mathbf{u}' * \mathbf{v}$ om vektorerna är på kolonnform. Prova också att använda funktionen `dot()`.

Datorövning 1.2 Skriv en funktion som beräknar skalärprodukt utan att använda `dot()`. Den ska ha deklarationen `function s=skalarprodukt(u,v)`.

Datorövning 1.3 Skriv en funktion som beräknar den skalära projektionen av en vektor $\mathbf{v}$ längs vektorn $\mathbf{u}$. Den ska ha deklarationen `function s=sproj(u,v)`.

Datorövning 1.4 Skriv en funktion som beräknar vektorprojektionen av en vektor $\mathbf{v}$ längs vektorn $\mathbf{u}$. Den ska ha deklarationen `function w=proj(u,v)`.

Datorövning 1.5 Skriv en funktion som beräknar kryssprodukten utan att använda `cross`. Den ska ha deklarationen `function w=kryss(u,v)`. Testa med några exempel och jämför med `cross()`.

Datorövning 1.6 Skriv en funktion som testar om två vektorer är ortogonala. Den ska ha deklarationen `function a=ortotest(u,v)`, där `a` är en boolesk variabel `a=0` eller `a=1` om falskt eller sant. Tips: skalärprodukt och $\cos(\theta) = 0$ om vektorerna är ortogonala. Testa med några exempel.

Datorövning 1.7 Skriv en funktion som testar om två vektorer är parallella eller antiparallella. Den ska ha deklarationen `function a=paratest(u,v)`, där `a` är en boolesk variabel `a=0` eller `a=1` om falskt eller sant. Tips: kryssprodukt och $\sin(\theta) = 0$ om vektorerna är parallella eller antiparallella. Testa med några exempel.

Datorövning 1.8 Låt $v = [1; -2; 4]$. Vad blir `length(v)`, `size(v)`, `abs(v)`, `norm(v)` och `sqrt(v'*v)`? Vad gör funktionerna `length()`, `size()`, `abs()` respektive `norm()`?

Datorövning 1.9 Ortogonal uppdelning. Skriv en funktion som delar upp vektorn v som $v=v_1+v_2$, där v_2 och v_2 är ortogonala och v_1 är parallell med vektorn u . Funktionen ska ha deklarationen `function [v1,v2]=ortodekomposition(u,v)`. Testa med övning 1.11.

Datorövning 1.10 Area av triangel. Skriv en funktion som beräknar arean av triangeln med hörnen i punkterna A, B, C . Deklaration `function a=triangelarea(A,B,C)`. Testa med övning 1.15.

Appendix A: Grekiska alfabetet

Lilla grekiska alfabetet

α	β	γ	δ	ε	ζ
alpha	beta	gamma	delta	epsilon	zeta
η	θ	ι	κ	λ	μ
eta	theta	iota	kappa	lambda	mu
ν	ξ	$\omicron$	π	ρ	σ
nu	xi	omicron	pi	rho	sigma
τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω
tau	upsilon	phi	chi	psi	omega

Bokstäverna ε , θ , σ och ϕ finns också i varianterna ϵ , ϑ , ς och φ .

Stora grekiska alfabetet

A	B	Γ	Δ	E	Z
Alfa	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta
H	Θ	I	K	Λ	M
Eta	Theta	Iota	Kappa	Lambda	Mu
N	Ξ	O	Π	P	Σ
Nu	Xi	Omicron	Pi	Rho	Sigma
T	Y	Φ	X	Ψ	Ω
Tau	Upsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

Appendix B: Programmering

Bokens datorövningar kan lösas i MATLAB eller valfritt programmeringsspråk (Fortran, C, C++, C#, Java, Python, Julia, Haskell, ...). Här sammanfattas några vanliga kommandon som kan vara användbara för att lösa bokens datorövningar i Python eller MATLAB. Python-modulen `pylab`¹ ger tillgång till funktionalitet liknande den i MATLAB. Detta gör att många av de kommandon som krävs för att lösa bokens datorövningar är identiska i MATLAB och Python.

Uppstart

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>from pylab import *</code>	
<i>Placeras först i scriptet</i>	<i>Kräver ingen import av extra funktionalitet</i>

Visa plottar

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>show()</code>	
<i>Placeras sist i scriptet</i>	<i>Kräver inget kommando; plottar visas direkt</i>

Iterera ett givet antal gånger

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>for n in range(10):</code> ...	<code>for n=1:10</code> ... <code>end</code>
<i>Itererar över $n = 0, 1, \dots, 9$</i>	<i>Itererar över $n = 1, 2, \dots, 10$</i>

Upprepa så länge ett villkor är uppfyllt

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>while condition:</code> ...	<code>while condition</code> ... <code>end</code>
<i>Upprepar så länge <code>condition</code> är uppfyllt</i>	<i>Upprepar så länge <code>condition</code> är uppfyllt</i>

1. Python-modulen `pylab` kombinerar de två Python-modulerna `numpy` och `matplotlib`, vilka ger tillgång till vektorer och matriser (arrayer) och plottning.

Definiera villkorssatser

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<pre>if condition0: ... elif condition1: ... else: ...</pre>	<pre>if condition1 ... elseif condition2 ... else ... end</pre>

Definiera funktioner

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<pre>def foo(x): ... y = ... return y</pre>	<pre>function y = foo(x) ... y = ...; end</pre>
	<i>Måste läggas i fil med namn foo.m</i>

Skapa linjär vektor (array) med x -värden

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>x = linspace(a, b, 101)</code>	<code>x = linspace(a, b, 101);</code>
<i>Ger 101 punkter och 100 intervall</i>	<i>Ger 101 punkter och 100 intervall</i>

Skapa logaritmisk vektor (array) med x -värden

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>x = logspace(-16, 16, 33)</code>	<code>x = logspace(-16, 16, 33);</code>
<i>Ger 33 punkter mellan 1×10^{-16} och 1×10^{16}</i>	<i>Ger 33 punkter mellan 1×10^{-16} och 1×10^{16}</i>

Plotta en funktion

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>plot(x, y)</code>	<code>plot(x, y)</code>

Sätta axelmarkörer och titlar

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>title('y = f(x)')</code> <code>xlabel('x')</code> <code>ylabel('y')</code>	<code>title('y = f(x)')</code> <code>xlabel('x')</code> <code>ylabel('y')</code>
Använd '\$x\$' för <i>LaTeX</i> -notation	

Anpassa linjärt polynom till punkter

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>p = polyfit(x, y, 1)</code>	<code>p = polyfit(x, y, 1);</code>
Polynomet ges av $p[0]*x+p[1]$	Polynomet ges av $p(1)*x+p(2)$

Evaluera polynom i punkter

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>y = polyval(p, x)</code>	<code>y = polyval(p, x);</code>

Spara plot till fil

<i>Python</i>	<i>MATLAB</i>
<code>savefig('foo.png')</code> <code>savefig('foo.pdf')</code>	<code>print('foo', '-dpng')</code> <code>print('foo', '-pdf')</code>

Kapitel 1

Övningar

Ö1.1 Rita figurer.

Ö1.2 Rita figurer.

Ö1.3 Vi utvecklar kvadraten

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - 5\mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u} - 5\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - 5\mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 - 10\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + 25|\mathbf{v}|^2 \\ &= |\mathbf{u}|^2 - 10|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\theta) + 25|\mathbf{v}|^2 = 4 - 60\cos(\theta) + 225 \end{aligned}$$

$$(a) \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{229 - 30\sqrt{3}} \quad (b) \cos(\pi/2) = 0, \sqrt{229}$$

$$(c) \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{229 - \frac{60}{\sqrt{2}}} \quad (d) \cos(\pi) = -1, \sqrt{289}$$

Ö1.4 Vi har $\text{sproj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{|\mathbf{v}||\mathbf{u}|\cos(\theta)}{|\mathbf{u}|} = 3\cos(\theta)$ och $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} = \frac{3}{2}\cos(\theta)\mathbf{u}$.

$$(a) \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{sproj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\mathbf{u}$$

$$(b) \cos(\pi/2) = 0, \text{sproj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = 0, \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

$$(c) \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{sproj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{3}{\sqrt{2}}, \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{3}{2\sqrt{2}}\mathbf{u}$$

$$(d) \cos(\pi) = -1, \text{sproj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = -3, \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = -\frac{3}{2}\mathbf{u}$$

Ö1.5 Vi har $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\theta) + |\mathbf{v}|^2$ så att

$$\cos(\theta) = \frac{|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2}{2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{4 - 9 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{-21}{24} = \frac{-7}{8}$$

$$\theta = \arccos(-7/8) \approx -2.6362$$

Ö1.6 (a) $\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = (3, 4, -1)$ (b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = (5, 8, 7)$

$$(c) \mathbf{u} - \mathbf{v} = (-3, 1, 5) \quad (d) \hat{\mathbf{v}} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$$

Ö1.7 $\arccos(-41/\sqrt{29 \cdot 153})$

Ö1.8 $t = 0$ och $t = 1/5$.

Ö1.9 (a) $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ (b) Nollvektorn kan ej normeras. (c) $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ (d) $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

Ö1.10 (a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{14}, |\mathbf{v}| = 3$ (b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -6$ (c) $\theta = \arccos(-2/\sqrt{14}) \approx 2.1347 \approx 122.3^\circ$

$$(d) \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = \frac{-6}{14}(-1, 2, 3) = (\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{9}{7})$$

Ö1.11 Se exempel 1.5, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) + (\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}))$.

(a) $\mathbf{u}_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\mathbf{u}_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (b) $\mathbf{u}_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\mathbf{u}_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

Ö1.12 $\arccos(4/\sqrt{21}) \approx 0.5097 \approx 28.2^\circ$

Ö1.13 (a) spetsig (b) rät (c) trubbig (d) spetsig om $t < 3$, rät om $t = 3$, trubbig om $t > 3$

Ö1.14 (a) 0 (b) 6 (c) 12 (d) 0

Ö1.15 (a) $9/2$ (b) $3\sqrt{11}/2$

Ö1.16 1

Ö1.17 De ortogonala vektorerna ges av $\mathbf{N} = \pm(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$. Efter normering får vi $\hat{\mathbf{N}} = \pm \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}$.

(a) $\hat{\mathbf{N}} = \pm(1, 1, 1)/\sqrt{3}$ (b) $\hat{\mathbf{N}} = \pm(1, 1, -1)/\sqrt{3}$

Ö1.18 $M = (13, 2, 18)$ [Nm]

Ö1.19

$$(a) \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 3 + 4t, \\ z = 2 + t, \end{cases} \quad -\infty < t < \infty; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{1}$$

$$(b) \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - 5t, \\ z = 3 - 2t, \end{cases} \quad -\infty < t < \infty; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-3}{-2}$$

$$(c) \begin{cases} x = 2, \\ y = -3 + 5t, \\ z = 1 + 2t, \end{cases} \quad -\infty < t < \infty; \quad x-2=0, \quad \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$$

Ö1.20 Vi normerar riktningsvektorn: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\hat{\mathbf{v}}$ och tar $t = \pm 1$. Vi får $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (\pm 1)\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{r}_0 \pm \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

(a) $(1 \pm \frac{1}{\sqrt{18}}, 3 \pm \frac{4}{\sqrt{18}}, 2 \pm \frac{1}{\sqrt{18}})$

(b) $(1 \pm \frac{1}{\sqrt{30}}, 2 \pm \frac{-5}{\sqrt{30}}, 3 \pm \frac{-2}{\sqrt{30}})$

(c) $(2, 2 \pm \frac{-5}{\sqrt{41}}, -3 \pm \frac{4}{\sqrt{41}})$

Ö1.21

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = t, \end{cases} \quad -\infty < t < \infty \quad \text{eller} \quad \mathbf{r} = t\mathbf{e}_z, \quad -\infty < t < \infty$$

Ö1.22 (a) $\mathbf{v} = (3, 1, -2)$, $P = (1, 2, -3)$ (b) $\mathbf{v} = (0, -5, 4)$, $P = (2, 2, -3)$

(c) Dividera först med 6. $\mathbf{v} = (3, 6, -2)$, $P = (0, -1, 1)$

Ö1.23 Vi har $P = (1, 3, 2)$ och läser av $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$, $P_0 = (1, 5, 2)$. Vi får $\overrightarrow{P_0P} = (0, -2, 0)$ och

$$\mathbf{v} \times \overrightarrow{P_0P} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (6, 0, -1), |\mathbf{v} \times \overrightarrow{P_0P}| = \sqrt{40}, |\mathbf{v}| = \sqrt{14}$$

Avståndet blir $d = \sqrt{40}/\sqrt{14} = 2\sqrt{5/7}$.

Ö1.24 (a) $(-1, 3, 0)$, $\mathbf{N} = (5, -2, 1)$ (b) $(6, 0, 0)$, $\mathbf{N} = (1, 2, 3)$ (c) $(0, 0, 0)$, $\mathbf{N} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 1)$ (d) $(0, 0, 6)$, $\mathbf{N} = (11, -4, -1)$

Ö1.25 $11x - 4y - z = 6$

Ö1.26 $(1, -1, 1)$

Problem

P1.1 Acceleration $\mathbf{a}$ med $a = |\mathbf{a}|$ [m/s²]. Elektriskt fält $\mathbf{E}$ [V/m]. Vridmoment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ [Nm].

P1.2

P1.3

P1.4

P1.5

P1.6

P1.7

P1.8

P1.9

P1.11 (a) 8 [J] (b) 0 [J] (c) -3 [J]

P1.12

P1.13

P1.14 Dela upp vektorn $\overrightarrow{P_0P}$ i ortogonala komponenter $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, där $\mathbf{w}_1$ är parallell/antiparallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}_2$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$, dvs ortogonal mot linjen, se exempel 1.5. Det sökta avståndet är $d = |\mathbf{w}_2| = |\overrightarrow{P_0P}| \sin(\theta)$ där θ är vinkeln mellan $\overrightarrow{P_0P}$ och $\mathbf{v}$. Men $|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{v}| |\overrightarrow{P_0P}| \sin(\theta)$ så att $d = |\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}| / |\mathbf{v}|$.

P1.15 $\pi/3$

P1.16 $(-2, -2, 1)$

Datorövningar

D1.1

MATLAB code

```

1 u = [-1;2;3]
2 v = [2;1;-2]
3 normu = norm(u)
4 normv = norm(v)
5 hatu = u/norm(u)           % normerad vektor
6 hatv = v/norm(v)           % normerad vektor
7 s = u'*v                   % skalärprodukt
8 theta = acos(hatu'*hatv)   % vinkel
9 projuv = (v'*hatu)*hatu    % vektorprojektion av v på u

```

D1.2

MATLAB code

```

1 function s = skalarprodukt(u,v)
2     s = u'*v;
3 end

```

MATLAB code

```

1 skalarprodukt = @(u,v) u'*v

```

D1.3

MATLAB code

```

1 function s = sproj(u,v)
2     % skalär projektion av v på u
3     hatu = u/norm(u);
4     s = v'*hatu;
5 end

```

D1.4

MATLAB code

```

1 function w = proj(u,v)
2     % vektorprojektion av v på u
3     hatu = u/norm(u);
4     w = (v'*hatu)*hatu;
5 end

```

D1.5

MATLAB code

```

1 function w = kryss(u,v)
2     w = zeros(3,1);           % skapa kolonnvektor
3     w(1) = u(2)*v(3) - u(3)*v(2);
4     w(2) = u(3)*v(1) - u(1)*v(3);
5     w(3) = u(1)*v(2) - u(2)*v(1);
6 end

```

D1.6*MATLAB code*

```
1 function a = ortotest(u,v)
2     a = (u'*v == 0);
3 end
```

D1.7*MATLAB code*

```
1 function a = paratest(u,v)
2     a = (norm(kryss(u,v)) == 0);
3 end
```

D1.8*MATLAB code*

```
1 v = [1;-2;4]
2 lv = length(v)
3 sv = size(v)
4 av = abs(v)
5 mv = v'*v
6 kv = norm(v)^2
7 nv = norm(v)
```

D1.9*MATLAB code*

```
1 function [v1,v2] = ortodekomposition(u,v)
2     % ortogonal uppdelning av v
3     hatu = u/norm(u);
4     v1 = (v'*hatu)*hatu; % vektorprojektion av v på u
5     v2 = v - v1;
6 end
```

D1.10*MATLAB code*

```
1 function a = triangelarea(A,B,C)
2     % arean av triangeln med hörn i A, B, C
3     u = B - A; % vektorn AB
4     v = C - A; % vektorn AC
5     a = 0.5*norm(kryss(u,v));
6 end
```

Sakregister

def, 36
elif, 36
elseif, 36
for, 35
if, 36
linspace, 36
logspace, 36
matplotlib, 35
numpy, 35
plot, 36
polyfit, 37
polyval, 37
print, 37
pylab, 35
return, 36
savefig, 37
show, 35
title, 37
while, 35
xlabel, 37
ylabel, 37

addition
 geometrisk vektor, 12
area av parallelogram, 21

basvektorer, 17

C, 35
C++, 35
C#, 35
Cartesiskt koordinatsystem, 17

determinant, 22

enhetsvektor, 14

fort, 12
Fortran, 35

geometrisk vektor, 11

Haskell, 35
hastighet, 12

högersystem, 17

Java, 35
Julia, 35

kolinjära vektorer, 12
komponenter, 18
komposanter, 18
koordinater, 19
koordinatsystem, 17
kraft, 12
kryssprodukt, 20

linjär kombination, 14

MATLAB, 35
multiplikation med skalär
 geometrisk vektor, 13

nollvektor, 11
normalvektor, 21, 25
normera, 14

ortogonal projektion, 15
ortogonala vektorer, 15
ortogonalitet
 geometrisk vektor, 15
ortonormerade basvektorer, 17
ortsvektor, 19

planet, 25
planets ekvation, 25
programmering, 35
Python, 35

riktningsvektor, 24
rät linje, 24
räta linjens ekvationer på parameterform, 24
räta linjens ekvationer på parameterfri form, 24

skalär trippelprodukt, 22
skalärprodukt
 geometrisk vektor, 14
subtraktion, 12

geometrisk vektor, 12

tyngdpunkt, 30

vektor

geometrisk, 11

vektoriell produkt, 20

volym av parallelepiped, 21

vridmoment, 28

