MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733 409006)
Telefonvakt: Barbara Schnitzer (031 772 5325)

TMV166 2018
2018–03–12 kl. 14:00–18:00 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårlästa lösningar.

Lösningar publiceras på kurshemsidan efter tentamens slut. Granskning kommer att ske vid ett tillfälle som annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!

/stig

[Denna sida ska vara blank.]

MATEMATISKA VETENSKAPER | TMV166 2018
Chalmers tekniska högskola | 2018–03–12 kl. 14:00–18:00 (SB Multi)
Examinator: Stig Larsson (0733 409006) | Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa
Telefonvakt: Barbara Schnitzer (031 772 5325)

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamensuppgifter

---

1. Formulera och bevisa Pythagoras sats. (3p)

2. Låt $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$. Då är $\{p_1, p_2, p_3\}$ en bas för $\mathbb{P}_2$, rummet av alla polynom av grad ≤ 2. Bestäm matrisen för deriveringsoperatorn $D\colon f \mapsto f'$ i denna bas. (3p)

3. Låt $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Sätt $W = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ och bestäm $w \in W$ och $x \in W^\perp$ sådana att $y = w + x$. (3p)

4. Skriv en Matlab-funktion `z=ortoproj(y,A)` som beräknar den ortogonala projektionen z av vektorn y på kolonnrummet till matrisen A. (3p)

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Beräkna $\det(A)$. (3p)

6. Med A som i föregående uppgift, beräkna A^{-1}. (3p)

7. Bestäm de a för vilka följande kvadratiska form är indefinit: $x_1^2 + 2ax_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2$. (3p)

8. Visa att om U är en ortogonal matris så gäller $\|Ux\| = \|x\|$. (3p)

9. Hur testar man i Matlab om matrisen U är ortogonal? (3p)

10. Skriv ned en ekvation för planet som har normalvektorn $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ och som går genom punkten $(-1, 4, 7)$. (3p)

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ och $v = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ -14 \end{bmatrix}$ vara givna. (5p)

(a) Bestäm en bas B för $\mathrm{Col}(A)$. (1p)

(b) Bestäm B-koordinaterna för v. (2p)

(c) Hur gör man detta med MATLAB? (Skriv ned de kommandorader som behövs och hur man tolkar resultatet av beräkningarna.) (2p)

12. Minstakvadratmetoden. (5p)

(a) Vad menas med en minstakvadratlösning till ekvationssystemet $Ax = b$? (1p)

(b) Visa att om $\hat{x}$ är en minstakvadratlösning till ekvationssystemet $Ax = b$, så är $\hat{x}$ en lösning till normalekvationerna. (1p)

(c) Beskriv hur man använder minstakvadratmetoden för att anpassa modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

till givna mätdata: $(x_1, y_1), \ldots (x_N, y_N)$. (2p)

(d) Hur gör man detta i MATLAB? (1p)

13. Betrakta följande system av ordinära differentialekvationer: (5p)

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a x_1(t) + x_2(t), \\ x_2'(t) &= b x_2(t), \end{aligned}$$

där a, b är reella tal.

(a) Skriv systemet på matrisform $x'(t) = Ax(t)$. För vilka värden på a, b är matrisen A diagonaliserbar? (2p)

(b) Lös systemet med hjälp av diagonalisering. (2p)

(c) För vilka värden på a, b är systemet stabilt, dvs alla lösningar går mot noll då $t \to +\infty$? (1p)

14. Låt $V = C([0,1])$ vara rummet av de kontinuerliga funktionerna med skalärprodukten $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ och underrummet $\mathbb{P}_2$, dvs rummet av alla polynom av grad ≤ 2. Låt $g_1(x) = x$, $g_2(x) = 1 - x$, $g_3(x) = x(1 - x)$. (5p)

(a) Visa att $\{g_1, g_2, g_3\}$ är en bas för $\mathbb{P}_2$. (1p)

(b) Bestäm koordinaterna för polynomet $p(x) = 2 - x^2$ i basen $\{g_1, g_2, g_3\}$. (2p)

(c) Använd Gram–Schmidts metod för att bestämma en ortogonalbas $\{q_1, q_2, q_3\}$ som består av linjärkombinationer av $\{g_1, g_2, g_3\}$. (2p)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733 409006)
Telefonvakt: Barbara Schnitzer (031 772 5325)

TMV166 2018
2018–03–12 kl. 14:00–18:00 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733 409006)
Telefonvakt: Barbara Schnitzer (031 772 5325)

TMV166 2018
2018–03–12 kl. 14:00–18:00 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1	$u \perp v \iff \lVert u+v\rVert^2 = \lVert u\rVert^2 + \lVert v\rVert^2$ Bevis: $\lVert u+v\rVert^2 = (u+v)\cdot(u+v) =$ $= \lVert u\rVert^2 + 2u\cdot v + \lVert v\rVert^2 = \lVert u\rVert^2 + \lVert v\rVert^2 \iff u\cdot v = 0$	
2	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
3	$w = \mathrm{proj}_W(y) = \frac{3}{5} v_1 + \frac{1}{9} v_2 = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 10 \\ 17 \\ 59 \end{bmatrix}$, $x = y - w = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 35 \\ 28 \\ -14 \end{bmatrix}$	
4	function z = ortoproj(y, A) U = orth(A); z = U*U'*y; end eller: ortoproj=@(y,A) orthA*orth(A)'*y	
5	4	
6	$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \end{bmatrix}$	
7	$\lvert a\rvert > 1$	
8	$\lVert Ux\rVert^2 = (Ux)^T(Ux) = x^T \underbrace{U^T U}_{=I} x = x^T x = \lVert x\rVert^2$	
9	>> U'*U-eye(size(U)) ska bli nollmatris	
10	$3(x+1) + 2(y-4) - 5(z-7) = 0$	

TMV166, 2018-03-12. Lösningar.

2. Låt operatorn D verka på basfunktionerna:

$Dp_1(x)=0$, $Dp_2(x)=1=p_1(x)$, $Dp_3(x)=2x=2p_2(x)$. Koordinaterna är

$$[Dp_1]=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\ [Dp_2]=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ [Dp_3]=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

3. Obs: $\{v_1, v_2\}$ är en ortogonalbas för W, ty $v_1^T v_2=0$.

Alltså: $w=\operatorname{proj}_W(y)=\dfrac{y^Tv_1}{v_1^Tv_1}v_1+\dfrac{y^Tv_2}{v_2^Tv_2}v_2=$

$$=\frac{3}{5}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}+\frac{1}{9}\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{45}\begin{bmatrix}10\\17\\59\end{bmatrix},\quad x=y-w=\frac{1}{45}\begin{bmatrix}45-10\\45-17\\45-59\end{bmatrix}=\frac{1}{45}\begin{bmatrix}35\\28\\-14\end{bmatrix}$$

5–6. Radreducering:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right]\ (-1/2)\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&1&0&0\\0&3/2&1&-1/2&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right]\ (-2/3)\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-2/3&4/3&-2/3&0\\0&3/2&1&-1/2&1&0\\0&0&4/3&1/3&-2/3&1\end{array}\right]\begin{array}{c}(\frac{1}{2})\\(\frac{2}{3})\\(3/4)\end{array}\sim$$

$\{$ Vi ser nu att $\det(A)=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=4$ $\}$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-\frac{1}{3}&2/3&-1/3&0\\0&1&2/3&-1/3&2/3&0\\0&0&1&1/4&-1/2&3/4\end{array}\right]\ (-2/3)\ (1/3)\quad\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/4&-1/2&1/4\\0&1&0&-1/2&1&-1/2\\0&0&1&1/4&-1/2&3/4\end{array}\right]$$

7. $A=\begin{bmatrix}1&a&0\\a&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&a&0\\a&1-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&a\\a&1-\lambda\end{vmatrix}=$

$=(3-\lambda)\left((\lambda-1)^2-a^2\right)=0$, $\lambda=3$, $\lambda=1\pm\sqrt{a^2}=1\pm|a|$

Eftersom $3>0$, $1+|a|>0$ så är kvadratiska formen indefinit om och endast om $1-|a|<0$ dvs $|a|>1$.

TMV166, 2018-03-12.

11. Radreducering: $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&-4\\2&6&8\end{bmatrix} (-1)\,(-2) \sim \begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&-5\\0&4&6\end{bmatrix} (-2) \sim \begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&-5\\0&0&4\end{bmatrix}$.

Pivotelement i kolonner 1, 2, 3 medför att kolonnerna a_1, a_2, a_3 är linjärt oberoende.

Bas för $Col(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-4\\8\end{bmatrix}\right\}$.

För att bestämma koordinaterna för $v=\begin{bmatrix}-1\\-7\\-14\end{bmatrix}$

löser vi $Ax=v$.

Radreducering: $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\1&3&-4&-7\\2&6&8&-14\end{array}\right] (-1)\,(-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&2&-5&-6\\0&4&6&-12\end{array}\right] (-2)\,(-1/2)$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&7/2&2\\0&2&-5&-6\\0&0&16&0\end{array}\right] \begin{matrix}\\(1/2)\\(1/16)\end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&7/2&2\\0&1&-5/2&-3\\0&0&1&0\end{array}\right] (5/2)\,(-7/2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&0\end{array}\right]$

Vi får $x=\begin{bmatrix}2\\-3\\0\end{bmatrix}$, dvs $[v]_B=\begin{bmatrix}2\\-3\\0\end{bmatrix}$ eller

$\begin{bmatrix}-1\\-7\\-14\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1\\-4\\8\end{bmatrix}$.

Matlab: >> A = [1 1 1; 1 3 -4; 2 6 8]

>> rref(A) ger $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ ⇒ pivot i alla kolonner

>> v = [-1; -7; -14]

>> rref([A v]) ger $\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&0\end{bmatrix}$

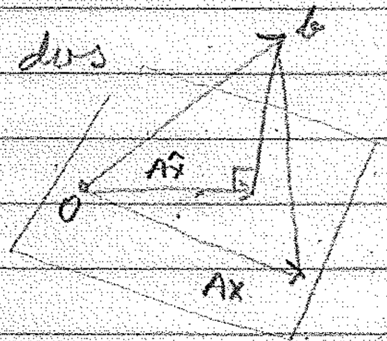
eller x = inv(A) * v

```
>> [R, jb] = rref(A);
>> B = A(:, jb);
```

TMV166, 2018-03-12

12. (a) Vektorn $\hat{x}$ kallas minstakvadratlösning till $Ax = b$, om den minimerar $\|Ax - b\|$, dvs $\|A\hat{x} - b\| \le \|Ax - b\| \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Antag $\|A\hat{x} - b\|$ är minimal. Då är $A\hat{x} - b$ ortogonal mot Col(A), dvs



$$A\hat{x} - b \perp Ax \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow (Ax)^T (A\hat{x} - b) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow x^T A^T (A\hat{x} - b) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow A^T (A\hat{x} - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T A\hat{x} = A^T b$$, dvs $\hat{x}$ löser normalekv.

(c) Vi sätter in datapunkterna i modellen:

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 = y_1 \\ \vdots \\ \beta_0 + \beta_1 x_N + \beta_2 x_N^2 = y_N \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$X\beta = y$, där $X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times 3}$, $\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$

Normalekvationerna: $X^T X \beta = X^T y$

ger en minstakvadratlösning $\hat{\beta}$.

(d) >> x = [x_1; ...; x_N]   % data skrivs in

>> y = [y_1; ...; y_N]   % data skrivs in

>> X = [ones(size(x)), x, x.^2] % designmatrisen

>> beta = X \ y   % parametervektorn.

eller >> beta = (X'*X)\(X'*y)

13. (a) $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x' = Ax$

Vi löser egenvärdesproblemet:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ 0 & b-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(b-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b$. A är diagonaliserbar om $\lambda_1 \neq \lambda_2$, enligt en sats, dvs om $b \neq a$.

$\lambda_1 = a$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = 0$, x fri $\Leftrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = b$ $\begin{bmatrix} a-b & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (a-b)x + y = 0 \Leftrightarrow y = (b-a)x$

$\Leftrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ b-a \end{bmatrix}$

Egenvektormatrisen är $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}$.

Den är inverterbar om och endast om $\det(P) = b - a \neq 0$, dvs $b \neq a$.

Egenvärdesmatrisen är $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

(b) Koordinattransformation: $x = Py$ ger

$$y' = P^{-1}x' = P^{-1}(Ax) = P^{-1}APy = Dy$$

dvs $\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$ med lösningen $\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

dvs $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$

$$= c_1 e^{at} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{bt} \begin{bmatrix} 1 \\ b-a \end{bmatrix}$$

(c) Systemet är stabilt omm $a < 0$, $b < 0$, ty då $e^{at} \to 0$, $e^{bt} \to 0$ när $t \to \infty$.

14. (a) $c_1 g_1 + c_2 g_2 + c_3 g_3 = 0$

$$\Leftrightarrow c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + c_3 g_3(x) = 0 \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow c_1 x + c_2 (1-x) + c_3 x(1-x) = 0 \quad \forall x$$

Tag $x = 1$: $c_1 = 0$ $\qquad x = 1/2$: $\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{4}c_3 = 0$

$x = 0$: $c_2 = 0$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$, dvs linjärt oberoende.

Är $\text{Span}\{g_1, g_2, g_3\} = \mathbb{P}_2$? Ja, för vi vet att $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$, eftersom $\mathbb{P}_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2\}$.

(b) Vi löser $c_1 g_1 + c_2 g_2 + c_3 g_3 = p$

dvs $c_1 x + c_2(1-x) + c_3 x(1-x) = 2 - x^2$

Tag: $x = 1$: $c_1 = 1$

$x = 0$: $c_2 = 2$

$x = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{4}c_3 = 7/4$ $\iff \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = 7 - 2 - 4 = 1 \end{cases}$

Alltså: $[p]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $2 - x = x + 2(1-x) + x(1-x)$.

Alternativt: uttryck g_1, g_2, g_3 i standardbasen $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$.

$[g_1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [g_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, [g_3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,

så att koordinattransformationsmatrisen blir

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ med } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Eftersom $[p] = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ får vi $[p]_B = P^{-1}[p] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) 1. $q_1 = g_1$, $W_1 = \text{Span}\{q_1\}$

2. $q_2 = g_2 - \text{proj}_{W_1}(g_2) = g_2 - \dfrac{\langle g_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 = g_2 - \dfrac{1/6}{1/2} q_1 = g_2 - \frac{1}{3} q_1$

$\langle q_1, q_1 \rangle = \int_0^1 x^2\,dx = 1/2$, $\langle g_2, q_1 \rangle = \int_0^1 (1-x)x\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$q_2(x) = 1 - x - \frac{1}{3}x = 1 - \frac{4}{3}x$, $W_2 = \text{Span}\{q_1, q_2\}$

3. $q_3 = g_3 - \text{proj}_{W_2}(g_3) = g_3 - \dfrac{\langle g_3, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1 - \dfrac{\langle g_3, q_2\rangle}{\langle q_2, q_2\rangle} q_2$

$$\langle g_3, q_1\rangle = \int_0^1 x(1-x)\,x\,dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12}$$

$$\langle g_3, q_2\rangle = \langle g_3, g_2 - \tfrac{1}{3} q_1\rangle = \langle g_3, g_2\rangle - \tfrac{1}{3}\underbrace{\langle g_3, q_1\rangle}_{=1/12} =$$

$$= \int_0^1 x(1-x)(1-x)\,dx - \tfrac{1}{36} = \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,dx - \tfrac{1}{36} =$$

$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{36} = \frac{18 - 6 + 9 - 1}{36} = \tfrac{20}{36} = \tfrac{5}{9}$$

$$\langle q_2, q_2\rangle = \int_0^1 \left(1 - \tfrac{4}{3}x\right)^2 dx = \int_0^1 \left(1 - \tfrac{8}{6}x + \tfrac{16}{9}x^2\right) dx = \tfrac{25}{27}$$

$$q_3 = g_3 - \frac{1/12}{1/2} q_1 - \frac{5/9}{25/27} q_2 = g_3 - \tfrac{1}{6} q_1 - \tfrac{3}{5} q_2$$

$$q_3(x) = x(1-x) - \tfrac{1}{6}x - \tfrac{3}{5}(1-x).$$

/stig