

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lösningar publiceras på kurshemsidan efter tentamens slut. Granskning kommer att ske vid ett tillfälle som annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!

/stig

[Denna sida ska vara blank.]

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamensuppgifter

1. Bestäm en ekvation för räta linjen som går genom punkterna $(3, 2, 1)$ och $(4, 5, 6)$. (3p)

2. Beräkna volymen av tetraedern som har hörn i punkterna $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(4, 5, 6)$ och $(6, 7, 9)$. (3p)

3. Bestäm en ekvation för planet som går genom punkterna $(1, 1, 1)$, $(4, 5, 6)$ och $(6, 7, 9)$. (3p)

4. Beräkna en LU -faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

5. Låt $\mathcal{C}(\mathbf{R}) = \{f : f \text{ är kontinuerlig på } \mathbf{R}\}$. Integrationsoperatoren $T : \mathcal{C}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbf{R})$ definieras av $(Tf)(x) = \int_0^x f(y) dy$. Är T en linjär operator? Motivering krävs. (3p)

6. Vad gör följande MATLAB-funktion? (3p)

```
function P=funk(A)
U=orth(A);
P=U*U';
end
```

7. Vad blir y efter följande kommandorader? (Med `funk()` som ovan) (3p)

```
P=funk([1 1;0 0])
x=[1;2]; y =P*x
```

8. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Beräkna egenvärdena till A . (3p)

9. För vilka värden på a är vektorerna $\{v_1, v_2, v_3\}$ linjärt oberoende? (3p)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ a \end{bmatrix}$$

10. Vad menas med att en matris U är ortogonal? (3p)

11. (5p)

- (a) Vad menas med nollrummet $\text{Nul}(A)$ till en $m \times n$ matris A ? (1p)
- (b) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. Bestäm en *ortogonal bas* för $\text{Nul}(A)$. (3p)
- (c) Skriv ned kod som visar hur man gör ovanstående beräkningar i MATLAB. (1p)

12. (5p)

- (a) Vad menas med “kvadratisk form”? (1p)
- (b) Vad menas med att en kvadratisk form är positivt definit? (1p)
- (c) Visa att en kvadratisk form är positivt definit om och endast om alla egenvärden till motsvarande matris är positiva. (3p)

13. $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ är inverterbar och har egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Vilka egenvärden har då A^{-1} ? (5p)

14. (5p)

- (a) Formulera Cauchy–Schwarz olikhet. (2p)
- (b) Formulera och bevisa triangelolikheten. (3p)

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod:

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1-10

Tentamenskod:

Uppgift	Svar	Poäng
1	$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 + 3t \\ z = 6 + 5t \end{cases}$	
2	$\frac{1}{6}$	
3	$2(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = 0$	
4	$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$	
5	Ja, $\int_0^x (T(\alpha f + \beta g))(y) dy = \int_0^x (\alpha f(y) + \beta g(y)) dy$ $= \alpha \int_0^x f(y) dy + \beta \int_0^x g(y) dy = (\alpha T(f) + \beta T(g))(x)$ dvs $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$	
6	Beräkna matrisen P för ortogonal projektion på kolonnrummet till A.	
7	$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	
8	1, 3, 6	
9	$a \neq 9$	
10	$U^T U = I$	

1. $P_1 = (3, 2, 1), P_2 = (4, 5, 6), w = \vec{P_1 P_2} = (4, 5, 6) - (3, 2, 1) = (1, 3, 5)$

$r = \vec{OP_1} + t w$

$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 + 3t \\ z = 6 + 5t \end{cases}$

2. $u = \vec{OP_1} = (1, 1, 1), v = \vec{OP_2} = (4, 5, 6), w = \vec{OP_3} = (6, 7, 9)$

$u \times v = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (1, -2, 1), w \cdot (u \times v) = 6 - 14 + 9 = 1$

$V = \frac{1}{6} |w \cdot (u \times v)| = \frac{1}{6}$

3. $u = \vec{P_1 P_2} = (3, 4, 5), v = \vec{P_1 P_3} = (5, 6, 8)$

$n = u \times v = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = (-2, 1, -2)$

$n \cdot \vec{P_1 P} = 0$

$2(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = 0$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-3) & (-2) \end{smallmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1/4)} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = U$

$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}, EA = U, L = E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}, A = LU$

5. $(T(\alpha f + \beta g))(x) = \int_0^x (\alpha f(y) + \beta g(y)) dy = \alpha \int_0^x f(y) dy + \beta \int_0^x g(y) dy$
 $= \alpha (Tf)(x) + \beta (Tg)(x) = (\alpha Tf + \beta Tg)(x), \text{ dvs } T(\alpha f + \beta g) = \alpha Tf + \beta Tg$

6. Beräkna matrisen P för ortogonal projektion på kolonnrummet till A .

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ortogonormerad bas för $\text{Col}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
 dvs $U = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $P = U U^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $y = Px = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

8. triangulär $\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-2) & (-3) \end{smallmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & a-21 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & a-9 \end{bmatrix}$, måste ha $a \neq 9$

11. a) $\text{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

TMV166, 2019-03-23

(2)

b) lös $Ax = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-5)} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-\frac{1}{4})} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} x_3 = s \\ x_4 = t \end{matrix}$$

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x = s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Bas för } \text{Nul}(A) = \{b_1, b_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ortogonalisera: $v_1 = b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$v_2 = b_2 - \text{proj}_{v_1}(b_2) = b_2 - \frac{b_2 \cdot v_1}{|v_1|^2} v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{[2 \ -3 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{1+4+1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{8}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi kan byta v_2 mot $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$. (rättelse)

ortogonal bas: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ (ej normerad).

c) $\gg A = [1 \ 2 \ 3 \ 4; 5 \ 6 \ 7 \ 8]$

$\gg R = \text{ref}(A)$, läs av b_1 och b_2

$\gg b_1 = [1; -2; 1; 0]$, $b_2 = [2; -3; 0; 1]$, $B = [b_1, b_2]$

$\gg U = \text{orth}(B)$ (ortonormerad bas)

12. a) $f(x) = x^T A x$ med symmetrisk matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

b) $x^T A x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ med $x \neq 0$

c) A är ortognalt diagonaliserbar: $A = P^T D P$ med $P^T P = I$.
Koordinatbyte: $x = Py$ ger $f(x) = x^T A x = (Py)^T A (Py) = y^T P^T A P y = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 > 0 \ \forall y \neq 0$

om och endast om alla $\lambda_k > 0$.

Eftersom $x = Py \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$ ser vi att $x^T A x > 0 \ \forall x \neq 0$

13. Antag $Av = \lambda v$. Då fås $A^{-1} A v = A^{-1}(\lambda v)$, dvs $v = \lambda A^{-1} v$.

Det följer att $A^{-1} v = \lambda^{-1} v$. Alltså: A^{-1} har egenvärdena

$\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$.

$$14 \text{ a) } |x \cdot y| \leq |x| |y|$$

$$\text{oder } |x^T y| \leq |x| |y|$$

$$b) |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } |x+y|^2 &= (x+y) \cdot (x+y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y = \\ &= |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &= (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

das wir anwendet auf $x \cdot y \leq |x \cdot y| \leq |x| |y|$
entligt Cauchy-Schwarz.

$$\text{Also: } |x+y| \leq |x| + |y|$$

stig