

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lösningar publiceras på kurshemsidan efter tentamens slut. Granskning kommer att ske vid ett tillfälle som annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!

/stig

[Denna sida ska vara blank.]

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamensuppgifter

1. Bestäm en ekvation för räta linjen som går genom punkterna $(7, 8, 9)$ och $(2, 3, 4)$. (3p)

2. Beräkna arean av parallelogrammen som spänns upp av vektorerna $(4, 5, 6)$ och $(6, 7, 9)$. (3p)

3. Bestäm en normalvektor och en punkt i planet för planet $3x - 4y + z = 7$. (3p)

4. Beräkna en LU -faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. (3p)

5. Lös differentialekvationssystemet med egenvektormetoden. (3p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - 5x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 3x_2(t) \end{cases}$$

6. Vad gör följande MATLAB-funktion? (3p)

```
function [lambda,x1]=funk(A,x0,tol)
x=x0;
delta=2*tol;
while delta>tol
y=A*x;
y=y/norm(y); % Normera y.
y=sign(x'*y)*y; % Se till att y och x inte motriktade.
delta=norm(x-y);
x=y;
end
lambda=y'*A*y;
x1=x;
end
```

7. Skriv en MATLAB-funktion som projicerar en given vektor v ortogonalt på kolonn-rummet till en given matris A . (3p)

8. Ge ett exempel på en linjär funktion. (3p)

9. Vad menas med att en funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är linjär? (3p)

10. Vad menas med en "kvadratisk form"? (3p)

11. Invers matris. (5p)

- (a) Vad menas med att en $n \times n$ matris A är inverterbar? (1p)
- (b) Beskriv med ord och formler hur man beräknar matris-inversen med Gauss-elimination. (2p)
- (c) Ge ett exempel på en 3×3 matris som inte är inverterbar. Motivera. (Ej noll-matrisen.) (2p)

12. Eigenvärdesproblem. (5p)

- (a) Lös eigenvärdesproblemet för matrisen $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$. (3p)
- (b) Bestäm en ortonormerad bas av egenvektorer till A . (2p)

13. Ortogonal projektion. (5p)

- (a) Underrummet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ har en ortonormerad bas $\{u_k\}_{k=1}^p$. Skriv ned definitionen av ortogonala projektionen av vektorn v på U .
- (b) Låt $U \subseteq \mathbb{R}^3$ vara rummet som spänns upp av $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. Projicera vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ortogonalt på U .

14. Olikheter. (5p)

- (a) Formulera Cauchy–Schwarz olikhet. (2p)
- (b) Formulera och bevisa triangelolikheten. (3p)

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod:

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

$$1. \quad v = (7, 8, 9) - (2, 3, 4) = (5, 5, 5)$$

$$r = (7, 8, 9) + t(5, 5, 5), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = 8 + 5t \\ z = 9 + 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad N = (3, -4, 1) \\ P_0 = \left(\frac{7}{3}, 0, 0\right)$$

$$2. \quad a \times b = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = (3, 0, -2)$$

$$\text{area} = \|a \times b\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\textcircled{3} \textcircled{-4} \\ \swarrow \searrow}} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 E_2 E_1 A = U, \quad A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} U = L U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5. \quad X'(t) = A X, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

$$X = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Beräkna ett dominant egenvärde och en motsvarande egenvektor med potensmetoden.

7. function $u = \text{proj}(A, v)$
 $U = \text{orth}(A);$
 $P = U * U';$
 $u = P * v;$
 end

8. $f(x) = Ax$ med $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$

9. Den bevarar linjär kombination, dvs

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

för alla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

10. En funktion $f(x) = x^T A x$ med $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symmetrisk matris.

11(a) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är inverterbar om det finns $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ så att

$$BA = AB = I$$

Matrisen B kallas inversen till A och skrivs $A^{-1} = B$.

(b) Bilda utvidgade matrisen

$$[A|I] \text{ med } I \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ enhetsmatrisen}$$

Radreducera så fås

$$[I|A^{-1}]$$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Då är $\det(A) = 0$ och

A är inte inverterbar.

$$12. (a) \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 5-\lambda \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)((5-\lambda)(8-\lambda)-4) - 4(4(8-\lambda)+4) - 2(8+2(5-\lambda))$$

$$= -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 18\lambda + 81) =$$

$$= -\lambda(\lambda-9)^2. \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 9, \quad \text{Lös } (A - \lambda I)v =$$

$$\lambda = 0: \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Gauss elim.} \\ v_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\lambda = 9: \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss elim.}} \begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_3, b_2 \text{ fria, } b_1 = b_2 - \frac{1}{2}b_3, \quad v = b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Vi har $\lambda = 0$, $E_0 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda = 9$, $E_9 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

(b) Vi ser att $v_1 \cdot v_2 = 0$, $v_1 \cdot v_3 = 0$,

men $v_3 \cdot v_2 = 1$.

Vi behöver ortogonalisera $\{v_2, v_3\}$.

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 \\ w_3 &= v_3 - \frac{v_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Är v_1, w_2, w_3 ortogonala.
Återstår att normera:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

13. (a) $U = \text{span}\{u_k\}_{k=1}^P$ med $u_k^T u_l = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$ 5

$$\text{proj}_U(v) = \sum_{k=1}^P (v^T u_k) u_k$$

(b) Vektorerna $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ är ortogonala men

ej normerade. Då fås

$$\begin{aligned} \text{proj}_U(v) &= \frac{u_1^T v}{u_1^T u_1} u_1 + \frac{u_2^T v}{u_2^T u_2} u_2 = \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

14. (a) $|u^T v| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

(b) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

Beweis: $\|u+v\|^2 = (u+v)^T(u+v) =$
 $= u^T u + 2 u^T v + v^T v = \begin{cases} u^T v \leq |u^T v| \leq \\ \leq \|u\| \|v\| \end{cases} \leq$
 $\leq \|u\|^2 + 2 \|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$
 $\Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$