

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lösningar publiceras på kurshemsidan efter tentamens slut. Granskning kommer att ske vid ett tillfälle som annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!

/stig

[Denna sida ska vara blank.]

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamensuppgifter

1. Ange en punkt på linjen och en riktingsvektor för den räta linjen (3p)

$$\frac{x-2}{3} = y+4 = 2z-2$$

2. Beräkna arean av parallelogrammen som spänns upp av vektorerna $(3, 2, 1)$ och $(1, 2, 3)$. (3p)

3. Bestäm en normalvektor och en punkt i planet för planet $5x + 3y + z = 8$. (3p)

4. Beräkna en LU -faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. (3p)

5. Beräkna $\det(A)$ med A som i föregående uppgift. (3p)

6. Vad gör följande MATLAB-funktion? (3p)

```
function P=funk(A)
Q=orth(A);
P=Q*Q';
end
```

7. Vad menas med att en symmetrisk matris $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ är "positivt definit"? (3p)

8. Vad menas med att en funktion $f: V \rightarrow V$ är linjär? (3p)

9. Visa att matrisen AB är ortogonal om A och B är ortogonala matriser i $\mathbf{R}^{n \times n}$. (3p)

10. Formulera Cauchy-Schwarz olikhet. (3p)

11. (5p)

(a) Vad menas med att en mängd av vektorer $\{v_1, \dots, v_n\}$ är linjärt oberoende? (2p)

(b) För vilka värden på a är mängden $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ linjärt oberoende? (3p)

12. (5p)

(a) Vad menas med att $\hat{x}$ är "minsta kvadratlösning" till $Ax = b$? (2p)

(b) Ett fysikaliskt fenomen följer ett linjärt samband $y = \beta_0 + \beta_1 x$. För att bestämma parametrarna β_0, β_1 gjordes följande mätning:

x	1	2	3	4
y	0	1	4	4

Beräkna β_0, β_1 med minsta kvadratmetoden. (3p)

13. Avgör om den kvadratiska formen $f(x) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$ är positivt definit, negativt definit eller indefinit. Bestäm, om möjligt vektorer, x och y sådana att $f(x) > 0$ och $f(y) < 0$. (5p)

14. Formulera definitionen av skalärprodukt $\langle u, v \rangle$ i ett vektorrum V . (5p)

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1-10

Tentamenskod:

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

1. $P = (2, -4, 1), v = (3, 1, \frac{1}{2})$

2. $A = \|a \times b\| = \|(4, -8, 4)\| = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

3. $N = (5, 3, 1), P = (0, 0, 8)$

4. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

5. $\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = 1 \cdot (-4) = -4$

6. Beräkna matrisen P för den ortogonala projektionen på kolonnrummet till A .

7. $(Ax)^T x > 0 \quad \forall x \neq 0$ eller $x^T Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$

8. $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \quad \forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

9. $(AB)^T(AB) = B^T \underbrace{A^T A}_{=I} B = B^T B = I$

10. $|x^T y| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

eller $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V$

TMV166 2019-08-26

11. (a) $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$

(b) $\forall a$ lösar $c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} a \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 3 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-3/2) & (-1/2) \end{smallmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & 17/2 & 8-3a/2 \\ 0 & 5/2 & 4-a/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (2) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & 17 & 16-3a \\ 0 & 5 & 8-a \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-5/17) \end{smallmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & 17 & 16-3a \\ 0 & 0 & \frac{56-2a}{17} \end{bmatrix}$$

$$\frac{-5}{17}(16-3a) + (8-a) = \frac{-80+15a+136-17a}{17} = \frac{56-2a}{17}$$

För unik lösning $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ måste vi ha $\frac{56-2a}{17} \neq 0$, dvs $a \neq 28$.

12. (a) $\|b - A\hat{x}\| \leq \|b - Ax\| \quad \forall x = \hat{x}$

(b)
$$\begin{cases} 0 = \beta_0 + \beta_1 \\ 1 = \beta_0 + 2\beta_1 \\ 4 = \beta_0 + 3\beta_1 \\ 4 = \beta_0 + 4\beta_1 \end{cases} \quad X\beta = y, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$X^T X \hat{\beta} = X^T y, \quad \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

13. $f(x) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = x^T A x$

med $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Lös egenvärdesproblemet: $A v = \lambda v$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 16) = 0$$

$$\lambda = 2, \quad \lambda = 2 \pm 4 = \begin{cases} -2 \\ 6 \end{cases}$$

Tre egenvärden $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$.

Både positiva och negativa $\Rightarrow$ indefinit.

För att finna x med $f(x) > 0$ kan vi ta egenvektorer till λ_2 eller λ_3 .

$$\text{För } \lambda_2 = 2: \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

v_3 är fri, v_1, v_2 är bundna.

Tag t.ex. $v_3 = 1, v_1 = v_2 = 0$, dvs $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$f(0, 0, 1) = 2 > 0$$

För $f(y) < 0$, kan vi ta egenvektor. (4)

fill $\lambda_1 = -2$:
$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)} \sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

v_2 fri, v_1, v_3 är bundna. T.ex $v_2 = 1, v_3 = 0, v_1 = -1$

$$f(-1, 1, 0) = \lambda_1 v^T v = -2 [-1, 1, 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \cdot 2 = -4 < 0$$

14. $\langle u, v \rangle$ är en funktion $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ av två variabler som uppfyller:

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in V$

2. $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V$

3. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

4. $\langle u, u \rangle > 0 \quad \forall u \in V, u \neq 0$

/stig