Lösningsförslag till tenta 2005-03-18
Matematisk analys D

Uppgift 1.

(a) Vi har den kända Taylorutvecklingen

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \;\Rightarrow\; \cos(\sqrt{2}\,x) = 1 - x^2 + O(x^4)$$

Nu får vi direkt omskrivningen

$$\frac{1-\cos(\sqrt{2}x)}{x^2} = \frac{x^2 + O(x^4)}{x^2} = 1 + O(x^2)$$

Svar: Gränvärdet är 1

(b) Vi har $f(1) = a - 1$. Funktionen är kontinuerlig precis då höger- och vänstergränsvärden, då $x \to 1$, båda är lika med $f(1)$. Detta ger $a-1 = 1$, dvs $a = 2$.
Svar: Konstanten $a = 2$.

(c) Vi ser direkt att $e^{\sin(x)}$ är en primitiv funktion till integranden. Integralens värde blir således

$$e^{\sin(\pi/2)} - e^{\sin(0)} = e - 1$$

Svar: $e - 1$

Uppgift 2. Eftersom $f'(x) > 0$ för $x \geq 0$, får vi direkt att f är inverterbar.

Men inverterbarheten följer också ur nedanståemde. Se nu på ekvationen

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; (\arctan(x))^2 + 2\arctan(x) - y = 0$$

Vi löser denna andragradsekvation och väljer den positiva lösningen

$$\arctan(x) = -1 + \sqrt{1+y} \;\Leftrightarrow\; x = \tan(\sqrt{y+1} - 1) = f^{-1}(y)$$

Vi byter här, som vi brukar, den oberoende variablen y ovan mot x.
Svar: $f^{-1}(x) = \tan(\sqrt{1+x} - 1), \quad 0 \leq x < (1 + \frac{\pi}{2})^2 - 1$.

Uppgift 3. Skivformeln ger direkt

$$\pi \int_0^1 (e^{2x} - x)dx = \pi[e^{2x}/2 - x^2/2]_0^1 = \pi(\frac{e^2}{2} - 1)$$

Svar: Volymen är $\pi(\frac{e^2}{2} - 1)$.

Uppgift 4.

(a) Vi har $z^6 = 2^6 \cdot e^{i(\pi+2k\pi)}$ och således kan rötterna skrivas
Svar: $z_k = 2 \cdot e^{i(\pi/6+k\pi/3)}$, $k = 0, 1, 2, 3, ..., 5$
Lite arbete, kanske med hjälp av BETA, ger det alternativa svaret
Svar: $\pm 2i$, $\pm(\sqrt{3}+i)$ och $\pm(\sqrt{3}-i)$.

(b) Sätt $z = x + iy$ och skriv ekvationen

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = -3 \;\Leftrightarrow\; e^x = |-3| = 3\ ,\ y = \arg(-3) = \pi + 2k\pi$$

Svar: $z = \ln(3) + i(\pi + 2k\pi)$, där $k \in Z$.

Uppgift 5.

(a) Detta är en linjär första ordningens ekvation, således bestämmer vi en intgrerande faktor $e^{\ln(x)} = x$. Efter multiplikation med denna kan ekvationen skrivas

$$(xy)' = xe^{x^2} \;\Leftrightarrow\; xy = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ ger $0 = \frac{1}{2}e + C$. Lösningen fås nu direkt
Svar: $y = (e^{x^2} - e)/(2x)$

(b) Motsvarande homogena ekvation ges av $y'' + \frac{1}{4}y = 0$, vars karakteristiska ekvation ges av $r^2 + \frac{1}{4} = 0$, dvs $r = \pm i\frac{1}{2}$. Allmän reellvärd lösning till homogen ekvation blir således $A \cdot \cos(x/2) + B \cdot \sin(x/2)$.

Den allmänna reellvärda lösningen till den inhomogena ekvationen blir därför
Svar: $y(x) = A \cdot \cos(x/2) + B \cdot \sin(x/2) + \sqrt{x}$