Lösningsförslag till tenta 2005-08-22
Matematisk analys D

Uppgift 1.

(a) Vi gör följande omskrivning

$$f(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{x+5}{(x+1)(x-1)} < 0$$

och ser att $f(x)$ ändrar tecken föx $x = -5, -1$ och 1. Eftersom $f(x) > 0$ för $x > 1$ fås nu
Svar:Olikheten gäller för $x < -5$ eller $-1 < x < 1$

(b) Vi använder ett vanligt trick. Förläng $\sqrt{x^2+1} - 1$ med dess s k konjugatkvantitet

$$\sqrt{x^2+1} - 1 = \frac{(\sqrt{x^2+1} - 1)(\sqrt{x^2+1} + 1)}{\sqrt{x^2+1} + 1} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1} + 1}$$

Med hjälp av olikheten $\sqrt{x^2+1} + 1 \geq \sqrt{1} + 1 = 2$ fås nu direkt att

$$\sqrt{x^2+1} - 1 \leq \frac{x^2}{2} \quad , \quad \forall x$$

Uppgift 2. Rita figur! Med skivformeln erhålles

$$\pi \int_1^{\sqrt{2}} x^2 dy = \pi \int_1^{\sqrt{2}} (y^2 - 1) dy = \frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$$

Uppgift 3. Sätt $p(z) = z^3 - 4z^2 + 4z - 3$ och $c = (1 - i\sqrt{3})/2$.
Eftersom $p(z) = z^3 - 4z^2 + 4z - 3$ har reella koefficienter blir även $\bar{c} = (1 + i\sqrt{3})/2$ en rot.

Enligt faktorteoremet blir $(z - c)(z - \bar{c}) = z^2 - z + 1$ en delare till $p(z)$. Detta ger nu lätt faktoriseringen

$$p(z) = (z^2 - z + 1)(z - 3).$$

Svar: Rötterna är 3 och $(1 \pm i\sqrt{3})/2$.

Uppgift 4. Vi bestämmer först en s k partikulärlösning till de inhomogena ekvationerna och därefter den allmänna lösningen till de homogena ekvationerna och adderar, dvs utnyttjar linjäriteten.

(a) Här finns säkert en polynomlösning $p(x)$. Eftersom vänsterledet sänker gradtalet på ett polynom duger det ej med $grad(p(x)) = 1$. Gör ansatsen

$$p(x) = ax^2 + bx$$

och enkla räkningar ger $p(x) = -x/2 + x^2$

Karakteristisk ekvation till den homogena ekvationen blir $r^2 + 5r = 0$, varför allmänn lösning till homogen ekvation blir $Ae^{-5x} + B$.
Svar:$y(x) = Ae^{-5x} + B - \frac{x}{2} + x^2$, där $A,\ B \in R$.

(b) Vi bestämmer istället en lösning till den komplexa ekvationen

$$y'' + 9y = e^{ix}$$

med ansatsen $y = Ke^{ix}$, där K är en konstant, och får lätt lösningen $y = \frac{1}{8}e^{ix}$. Realdelen av denna, dvs $y = \frac{1}{8}\cos(x)$, blir en lösning till ekvationen i uppgiften.

Karakteristisk ekvation till den homogena ekvationen blir $r^2 + 9 = 0$ med lösningar $r = \pm 3i$. Den allmänna reellvärda lösningen till den homogena ekvationen blir därför $A\cos(3x) + B\sin(3x)$.
Svar:$y(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) + \frac{1}{8}\cos(x)$, $A,\ B \in R$.

Uppgift 5. En lösning till ekvationen är $m = K$, där K är en konstant. Vilket ger $-10^{-3}K + 0.2 = 0$, dvs $K = 200$. Den homogena ekvationen

$$m'(t) + 10^{-3} \cdot m(t) = 0$$

har allmän lösning $Ae^{-10^{-3} \cdot t}$. Allmän lösning till inhomogen ekvation blir således $m(t) = Ae^{-10^{-3} \cdot t} + 200$.

Begynnelsevillkoret $m(0) = 0$ ger $A = -200$ och alltså lösningen

$$m(t) = 200(1 - e^{-10^{-3} \cdot t})$$

Svar: $M = 200$