Lösningsförslag till tenta 2007-03-16
Matematisk analys D

Uppgift 1.

(a) Vi har följande Taylorutvecklingar kring $x = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)\ ,\ \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\ ,\ \sin x = x + O(x^3)$$

och får således

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + O(x^3)}{x^2} = 1$$

(b) Vi ger en utförlig lösning. Definiera

$$g(y) = \int_0^y \sqrt{1+t^4}dt$$

då blir $F(x) = g(\sin x)$ och kedjeregeln ger $F'(x) = g'(\sin x)\cos x$. Eftersom $g'(y) = \sqrt{1+y^4}$ fås nu
Svar: $F'(x) = \sqrt{1+\sin^4(x)}\cos x$.

Uppgift 2. Rita själv området D ! Enklast blir det nog att använda skivformeln med skivor, vinkelräta mot x-axeln. Vi får

$$\pi \int_0^\pi \sin^2(x)dx = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \pi\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

Uppgift 3. Eftersom polynomet har reella koefficienter blir både i och $-i$ rötter till ekvationen. Detta ledar till att $(z-i)(z+i) = z^2+1$ blir en delare till polynomet i vänsterldet. Division ger

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = (z^2+1)(z^2-2z+3) = 0$$

Svar: Rötterna är $\pm i$ och $1 \pm i\sqrt{2}$

Uppgift 4.

(a) Efter en enkel omskrivning fås ekvationen på separabel form

$$e^y y' = \frac{1}{1+t^2} \;\Leftrightarrow\; e^y = \tan^{-1}(t) + C$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger $C = 1$ och lösningen
Svar: $y(t) = \ln(\tan^{-1}(t) + 1)$

(b) *Bestämning av allmän lösning till homogen ekvation.*
Den karakteristiska ekvationen blir $r^2 + 3r + 2 = 0$ med rötter -1 och -2 och således

$$y_h = Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

Bestämning av en lösning till inhomogen ekvation.
Vi gör nu ansatsen $y_p = Ke^{-3t}$ och får $(9 - 9 + 2)K = 1$, dvs vi kan välja $y_p = \frac{1}{2}e^{-3t}$.

Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen fås genom addition $y = y_h + y_p$.
Svar: $y = Ae^{-t} + Be^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$.

Uppgift 5. Vi får först ekvationen $pz^{p-1}z' + z^p = -z^{2p}e^t$ och efter förenkling $pz' + z = -z^{p+1}e^t$. Väljer vi nu $p = -1$ fås

$$z' - z = e^t$$

vilket är en linjär ekvation av första ordningen och alltså kan lösas med integrerande faktorteknik. Integrerande faktor e^{-t} ger

$$(ze^{-t})' = 1 \;\Leftrightarrow\; ze^{-t} = t + C \;\Leftrightarrow\; z = e^t(t + C)$$

Vi har $z(0) = 1$, vilket ger $C = 1$ och slutligen

Svar: $y(t) = \frac{e^{-t}}{1+t}$