Kortfattade lösningar till tentan 2010-03-12
Matematisk analys

Uppgift 1.

(a) Taylorutvecklingar

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)\ ,\ \sin^2(t) = (t + O(t^3))^2 = t^2 + O(t^4)\ .$$

Vi får nu lätt

$$\frac{\pi x - \ln(1+\pi x)}{\sin^2(x)} = \frac{\pi^2 x^2/2 + O(x^3)}{x^2 + O(x^4)} = \frac{\pi^2/2 + O(x)}{1 + O(x^2)}\ .$$

Svar: $\pi^2/2$.

(b) Direkt integration ger

$$y^4 = -\frac{1}{x} + C \quad , \quad y(1) = 1 \Rightarrow 1 = -1 + C\ ,\ C = 2\ .$$

Svar: $y = (2 - \frac{1}{x})^{\frac{1}{4}}$.

Uppgift 2. Området ligger i y-led mellan $y = e^{(x^2)}$ och $y = e$. Rita själv en figur!
Skivformeln:

$$\pi \int_1^e x^2 dy = \pi \int_1^e \ln(y)dy = \pi \left[y\ln(y) - y\right]_1^e = \pi$$

Cylindriska skal:

$$2\pi \int_0^1 x(e - e^{(x^2)})dx = 2\pi \left[e\ x^2/2 - e^{(x^2)}/2\right]_0^1) = \pi$$

Uppgift 3. Vi får direkt att $V_f = \{y : y > 0\}$. Se på ekvationen $f(x) = y$ eller

$$e^{4x} + 2e^{2x} - y = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = -1 \pm \sqrt{1+y}$$

Här måste plustecknet väljas och vi får

$$x = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+y} - 1) = f^{-1}(y) \quad , \quad y > 0$$

Svar: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x} - 1) \quad , \quad x > 0$

Uppgift 4. Vi har att $p(z_0) = 0$ för något $a \in R$, medför att $p(\bar{z_0}) = 0$. Således blir $(z - z_0)(z - \bar{z_0}) = z^2 - 2z + 6$ en delare till $p(z)$, dvs.

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + az^2 - 4z + 12 = (z^2 - 2z + 6)(z^2 + bz + 2) \ .$$

Ovanstående ger $b = 0$ och $a = 8$.
Svar: För $a = 8$ blir rötterna $1 \pm i\sqrt{3}$ och $\pm i\sqrt{2}$.

Uppgift 5.

(a) Vi får att

$$\ell(y_1) = \frac{2}{2+x}\cos(x) - \frac{1}{(2+x)^2}\sin(x)$$

(b) Ur a) ser vi att vi bör bestämma y_2, säg, så att $\ell(y_2) = e^{-x}$. Ansatsen $y_2 = Ke^{-x}$ ger $K = 1/2$. Beroende på linjäriteten blir $y_1 + y_2$ en lösning till den ursprungliga ekvationen. Vars allmänna lösning nu kan skrivas

$$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \ln(2+x)\sin(x) + \frac{1}{2}e^{-x}$$

(c) Anpassning till begynnelsevillkoren

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow A + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Vidare har vi

$$y'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x) + y_1' - \frac{1}{2}e^{-x}$$

och eftersom $y_1'(0) = \ln(2)$ fås nu

$$y'(0) = B + \ln(2) - \frac{1}{2} = \ln(2) \Leftrightarrow B = \frac{1}{2}$$

Svar: $y(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + \ln(2+x)\sin(x) + \frac{1}{2}e^{-x}$