VECKOPROGRAM för gruppövningar och självverksamhet.
Matematisk analys D.

Läsvecka 4

Smågruppövning v4:1, (5.6, 6.1) Vi skall nu behandla problemet att betämma primativa funktioner, dvs till en given funktion bestämma en annan vars derivata är lika med den givna. Teoretiskt är detta lätt! Om $f(x)$ är kontinuerlig för exempelvis $x \geq 0$ gäller ju att

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x).$$

Svårigheten är att uttrycka $F(x)$ med hjälp av våra elementära funktioner, vilket inte ens alltid är möjligt, även om $f(x)$ är uttryckt på detta sätt.

Vi skall inte driva räknefärdigheten inom detta område särskilt långt, utan istället komplettera med datoralgebra och formelsamling.

1. Avsnitt 5.6. Se på det violetta sidan 334/302/317 och hoppa över formler innehållande $\sec, \csc, \sinh$ och $\cosh$. Se exempel 1 och 2.

2. Lägg märke till möjligheten att ibland kunna *integrera direkt*, i boken kallas det för 'method of substitution'.
$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) \ , \ F' = f.$$
Formeln är en direkt konsekvens av kedjeregeln. Gå nu igenom exempel 3, men kanske utan att införa någon ny variabel, 'u' som boken gör. Efter 'exercises' nedan går vi vidare till kapitel 6.

3. Exercises 5.6: 3 , 4 , 9 , 15 , 21 , 25

Vi skall nedan studera två sätt att omforma en integral nämligen *partiell integration* och *variabelsubstitution* (eng. *variable substitution* i boken kallas det faktiskt till och med för *inverse variable substitution*). Dessa förfaringssätt kan ibland användas för att hitta primitiva funktioner. De har också andra användningsområden, vilket framgår av två övningar längre fram.

Vi börjar med **partiell integration**

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx \ , \ F' = f,$$

som fås genom att derivera $F(x)g(x)$ och integrera. Se avsnitt 6.1. Den violetta varianten, annat skrivsätt, på sidan 349/317/332 ser stilig ut men jag har svårt att finna den praktisk. Ni bestämmer själva! Se på några exempel och gör därefter 'exercises':

Exercises 6.1: 1 , 3 , 7 , 19

Övning: Låt f vara kontinuerligt deriverbar ett antal gånger. Visa följande och generalisera gärna genom att partialintegrera några gånger till. Känner ni igen vad ni ser?

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = [(t-x)f'(t)]_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)dt$$

Storgruppövning v4:2, (6.6 , 7.9) Vi skall nu se lite på numerisk beräkning av bestämda integraler och samtidigt träna på bl a variabelsubstitution och *Matlab*.

1. Läs om Trapetsmetoden och Mittpunktsmetoden. Den senare kallas på svenska ofta Rektangelmetoden. Det finns naturligtvis effektivare metoder men vi nöjer oss med dessa. Läs t o m exempel 2 sidan 389/352 och se sedan på teorem 4. Observera att felen blir av storleks ordning $O(h^2)$, men det krävs att integranden är 'snäll'! Mera om detta senare.

2. Övning 1: Vi skall nu skriva en *Matlab*-funktion *trapets(f,a,b,n)* för approximativ beräkning av
$$\int_a^b f(x)dx,$$
med konstant steg $h = (b-a)/n$. Vi väljer Trapetsmetoden därför att den har intressantare generaliseringar än Rektangelmetoden. När *trapets* anropas skall naturligtvis en aktuell funktionsparameter, t ex 'integrand1', användas istället för den formella parametern f. Inuti *trapets* måste ni tala om att f är en funtion. Hur? Ge kommandot *help feval*!

3. Övning 2: Beräkna nu med tre korrekta decimaler följande integraler

$$\int_0^1 e^x dx \ , \ \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}} dx \ , \ \int_0^5 \frac{\sin(10\pi x)}{1+e^{-x}} dx$$

4. Övning 3: Samma uppgift som för övning 2 ovan.

$$\int_0^1 \frac{sin(x)}{x} dx \ , \ \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx \ , \ \int_0^1 \frac{\cos(x)}{(1-x)^{\frac{1}{4}}} dx \ , \ \int_0^1 \frac{(1-\cos(x))^{\frac{1}{3}}}{x} dx$$

   Här föreligger viss komplikation. Integranden i den första integralen är helt snäll om den definieras för $x = 0$ som ? I den andra gör ni variabelsubstitutionen $x = t^2$ och analogt för nästa integral.

   Vilket variabelbyte kan passa för den sista integralen? På vilket sätt är dess integrand obegränsad? Serieutveckla och gör sedan variabelbyte med ledning av resultatet och hanteringen av de två närmast föregående integralerna.

5. **Separabla differentialekvationer**. En differentialekvation är ett samband innehållande en obekant funktion och derivator av densamma. Exempelvis $dy/dt = y$ med en lösning $y = e^t$ och allmän lösning $y = C \cdot e^t$, där C är en godtycklig konstant. Se nu på $dy/dt = f(t)$, vilken kan integreras direkt till $y(t) = \int f(t)dt$, och kanske inte är mycket till differentialekvation. Även något allmännare ekvationer kan integreras direkt

$$g(y)\frac{dy}{dt} = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad \int g(y)dy = \int f(t)dt + C.$$

   Lös ekvationen $y' = y$ med denna teknik. Läs sidorna 465-466/422-423/445-446 i avsnitt 7.9.
   Exercises 7.9: 1 , 7 , 17.

Smågruppövning v4:3, (6.2 , 6.3 , 6.5) Vi börjar med **Variabelsubstitution**, avsnitt 6.2/6.2/6.3. Betrakta

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt,$$

där den kontinuerligt deriverbara funktionen $g(t)$ avbildar intervallet $[\alpha, \beta]$ på $[a, b]$, så att $a = g(\alpha)$ och $b = g(\beta)$. Ofta är g monton, men det krävs ej.

1. Se exempel 1, 2 , 5 , 6
2. Exercises 6.2/6.2/6.3: 1 , 3 , 7
3. Avsnitt 6.3/6.3/6.2. Till rationella funktioner kan man alltid hitta primitiva funktioner, genom att använda så kallad partialbråkuppdelning. Läs sidorna 364–369/329–334/337-343. I Beta, som ni bör bekanta er med, finns en sammanfattning för reell partialbråksuppdelning, se index längst bak på *Partial fraction.*
4. Exercises 6.3/6.3/6.2: 4 , 5 , 15 , Använd *Mathematica* på minst 5 integrationsproblem, som ni väljer själva. Gör också några partialbråksuppdelningar med kommandot *apart*!
5. Avsnitt 6.5. Se exempel 1 och 2 samt definition 1 och 2. Teorem 2 inklusive bevis.
6. Självversamhet: Review exercises sidan 404/365/387. 1 , 3 , 11 , 19 , 32 , 58