Chalmers Tekniska Högskola
Matematik

Tentamen: Matematisk analys D
TMV170 och MAD120

Datum: 2005-03-18 **Tid:** 0830-1230 **Salar:** V

Förfrågningar: Marcus Better tel 073-9779268

Lösningar: Kommer att finnas på nätet
www.math.chalmers.se/˜goran/Danalys

Betygsgränser: Poäng 20, 30 resp 40, ger betyget 3, 4 resp 5.

Resultat: Anslås senast 2005-04-08, Matematiskt Centrum (MC), Eklandagatan 86.

Hjälpmedel:

- Högst en av formelsamlingarna Beta eller Physics handbook. Observera *inga* miniräknare.

Uppgift 1. De tre problemen i denna uppgift är mycket grundläggande och föga arbetskrävande. Vid bedömningen ges rätt svar synnerligen hög prioritet.

(a) Bestäm följande gränsvärde

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(\sqrt{2}\, x)}{x^2} \quad (3p)$$

(b) Betrakta nedanstående funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 1 \\ ax - 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Bestäm konstanten a så att $f(x)$ blir kontinuerlig för $x = 1$. (3p)

(c) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin(x)} \cos(x) dx$$

Kanske kan kedjeregeln ge vägledning, men det går även på annat sätt. (4p)

Uppgift 2. Betrakta funktionen

$$x \;\to\; f(x) = (\arctan(x))^2 + 2\arctan(x)$$

som vi låter vara definierad för $x \geq 0$.

Visa att $f(x)$, observera för $x \geq 0$, är inverterbar och uttryck inversen $f^{-1}(x)$ med hjälp av våra elementära funktioner. (10p)

Uppgift 3. I ett xy–plan roteras området

$$D = \{(x,y) : \sqrt{x} \leq y \leq e^x \ , \ 0 \leq x \leq 1\}$$

kring x–axeln. Bestäm volymen av den så erhållna rotationskroppen. (10p)

Uppgift 4.

(a) Ange alla komplexa rötter till ekvationen $z^6 + 64 = 0$ (5p)

(b) Ange alla komplexa rötter till ekvationen $e^z = -3$. (5p)
Ledning: Tänk på att $z \ \rightarrow \ e^z$ är $2\pi i$ - periodisk.

Uppgift 5.

(a) Ange lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y' + \frac{1}{x}y = e^{x^2} \quad , \quad x \geq 1 \quad , \quad y(1) = 0 \quad (5p)$$

(b) Funktionen $y = \sqrt{x}$ satisfierar

$$y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}(1 - x^{-2})\sqrt{x}$$

Detta behöver Du emellertid ej visa nu.
Ange allmän reellvärd lösning till differentialekvationen ovan. (5p)

Lycka till !