Chalmers Tekniska Högskola
Matematik

Tentamen: Matematisk analys D
TMV170 och MAD120

Datum: 2006-03-10 **Tid:** 0830-1230 **Salar:** M

Förfrågningar: tel 073-9779268

Lösningar: Kommer att finnas på nätet
www.math.chalmers.se/˜goran/Danalys

Betygsgränser Chalmers: Poäng 20, 30 resp 40, ger betyget 3, 4 resp 5.

Betygsgränser Universitet: Poäng 20 resp 35, ger betyget G resp VG.

Resultat: Anslås Matematiskt Centrum, Chalmers Tvärgata 3.

Skrivningsvisning: Se kurssidan den 20/3.

Hjälpmedel:

- Högst en av formelsamlingarna Beta eller Physics handbook. Observera *inga* miniräknare.

Uppgift 1.

(a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)} \quad (5p)$$

(b) Betrakta funktionen $x \to f(x) = e^{2x} + 2e^x + 1$. Uttryck inversen $f^{-1}(x)$ med hjälp av våra elementära funktioner. (5p)

Uppgift 2. I ett xy–plan roteras området

$$D = \{(x,y) : e^x \leq y \leq e\ ,\ 0 \leq x \leq 1\}$$

kring x–axeln. Bestäm volymen av den så erhållna rotationskroppen. (10p)

Uppgift 3. Ange lösningarna till nedanstående begynnelsevärdesproblem

(a)

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2y^2 \quad , \quad y(0) = 1 \qquad (5p)$$

(b)

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1\ , \qquad (5p)$$

Var god vänd!

Uppgift 4. Ange alla komlexa lösningar till nedanstående ekvationer, där $i^2 = -1$.

(a)

$$z^3 = \frac{1+i}{1-i}\ , \qquad (5p)$$

(b)

$$e^z = -2 + i2\ , \qquad (5p)$$

Ledning: Blir nog enklast om högerledet skrives på polär form.

Uppgift 5.

Betrakta följande problem. Bestäm lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-t} \cdot \sin(t)$$

uppfyllande villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$.

(a) Ange den allmänna reellvärda lösningen till den homogena ekvationen

$$y'' + 2y' + 2y = 0\ , \qquad (2p)$$

(b) *För spelare i den övre divisionen.*

Bestäm nu den entydiga lösningen till begynnelsevärdesproblemet ovan. (8p)

Allmän uppmaning: Kontrollera självfallet alla räkningar noggrant, och glöm ej möjligheten att ibland räkna fram ett svar på två olika sätt. Det senare går t ex bra i 1a) och 2. Symboliska lösningar till ekvationer av olika slag kan kontrolleras medelst 'instoppning'. Kontrollera även eventuella begynnelsevillkor.
Vid bedömningen ges rätt svar synnerligen hög prioritet.

Lycka till !