

Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet  
Matematik

Tentamen: Matematisk analys D  
TMV170 och MMG D30

Datum: 2009-03-13 Tid: 0830-1230 Salar: H

Förfrågningar: tel 0762-721860 , 0762-721861

Lösningar: Kommer att finnas på nätet  
[www.math.chalmers.se/~goran/Danalys](http://www.math.chalmers.se/~goran/Danalys)

Betygsgränser Chalmers: Poäng 20, 30 resp 40, ger betyget 3, 4 resp 5.

Betygsgränser Universitet: Poäng 20 resp 35, ger betyget G resp VG.

Skrivningsvisning: Se kurssidans den 23/3.

Hjälpmedel:

- Högst en av formelsamlingarna Beta eller Physics handbook. Observera *inga* miniräknare.
- Avsluta varje deluppgift med: Svar: ...

Uppgift 1.

(a) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2}. \quad (5p)$$

(b) Ange lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y' + 2xy = e^{-x^2}, \quad y(0) = 1. \quad (5p)$$

Uppgift 2.

(a) Betrakta funktionen

$$x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x^4 + 1},$$

som vi låter vara definierad för  $x \geq 0$ . Uttryck inversen  $f^{-1}(x)$  med hjälp av våra elementära funktioner. (5p)

(b)

Nedanstående ekvation

$$\sin^2(x) + 2 \cos(x) - \frac{17}{9} = 0$$

har en lösning vi kallar för  $\theta_0$  med  $0 < \theta_0 < \pi/2$ . Bestäm  $\tan(\theta_0)$ !

*Ledning:* Observera att du ej behöver ange  $\theta_0$ , samt tänk på sambandet  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ . (5p)

**Uppgift 3.** I ett ortonormerat koordinatsystem  $O_{xy}$  roteras området

$$D = \{(x, y) : e^x - 1 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \ln(2)\}$$

kring  $y$ -axeln. Bestäm volymen av den så erhållna rotationskroppen. (10p)

*Ledning:* Här fungerar både tekniken med cylindriska skal och skivformeln väl, vilket naturligtvis kan användas för kontroll. Redovisa dock endast en variant. Rita ut området  $D$  korrekt och markera även relevant delområde ('snuttområde'). Beta 7.4 kan bespara dig en del arbete.

**Uppgift 4.** Bestäm de reella konstanterna  $a$  och  $b$  nedan, så att den algebraiska ekvationen

$$p(z) = z^4 + az^3 + 2z^2 + bz + 8 = 0$$

får en rot  $-1 + i\sqrt{3}$ . Ange slutligen alla rötterna till ekvationen. (10p)

*Ledning:* Tänk på att  $w + \bar{w} = 2\operatorname{Re}(w)$ ! Konstanterna  $a$  och  $b$  kan naturligtvis bestämmas ur likheten  $p(-1 + i\sqrt{3}) = 0$ , men det finns ett mycket bättre sätt.

**Uppgift 5.** I denna uppgift betraktar vi två begynnelsevärdesproblem, utan inbördes samband.

(a) Ange lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 4y = e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \quad (5p)$$

(b) *Synpunkt:* Här kommer ett troligen svårare begynnelsevärdesproblem, som du kanske inte skall ägna alltför mycket tid, innan du löst de andra uppgifterna med stor omsorg och noggrannhet.

Ange lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$e^y \frac{dy}{dx} - 2e^x = e^{y+x}, \quad y(0) = 0. \quad (5p)$$

**Lycka till !**