VECKOPROGRAM för gruppövningar och självverksamhet.
Matematisk analys D.
Läsvecka 5

Den här veckan skall vi tillämpa våra integralkunskaper på ett antal geometriska problem: Area- och volymsberäkningar samt båglängdsbestämning för kurvor. Dessutom skall vi syssla med så kallade Taylorutvecklingar sist i veckan.

Smågruppövning v5:1, v5:3, (7.1 , 7.2 , 7.3 , 8.2-8.3) Läs lite i början på 7.1. Lägg märke till det violetta på sidan 409/370/392 och även tillhörande figur 7.4. Se därefter på exempel 1 och 2, samt kanske också på det något besvärligare exempel 6. Avsnitt 7.2 kastar vi en blick på.

Exercises 7.1: 1 , 3 , 19 , 7.2: 5 , 9 , 13

Kurvgeometri: Tangent, båglängd ...

1. Vi börjar med funktionskurvor $y = f(x)$. Läs 7.3 t o m exempel 3.
2. Exercises 7.3: 12 , 13 , 15. Använd Beta eller *Mathematica* för de två första.
3. Nu skall vi se på kurvor på parameterform

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad a \le t \le b, \tag{1}$$

där $x(t)$ och $y(t)$ är givna funktioner av *parametern* t.

Övning 1:
a) $x = \cos(t), y = sin(t),\ 0 \le t \le 2\pi$. Plotta i *Matlab*.

b) $x = 2\cos(t), y = sin(t),\ 0 \le t \le 2\pi$. Plotta i *Matlab*.

c) $x = \cos(t), y = sin(t), z = t,\ 0 \le t \le 4\pi$. Plotta i *Matlab*.

Ledning: Använd *plot* i a) och b) men *plot3* i c).

4. Försök att 'härleda' följande formel för båglängden av (1)

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau)^2} d\tau \tag{2}$$

med hjälp av Riemann summor. Använd nu (2) på en funktionskurva $y = f(x)$ för att kontrollera att formeln stämmer i detta specialfall.

5. Övning 2: Beräkna båglängden för kurvan i övning 1c) ovan, genom att generalisera (2).
6. Bilda sekantvektorn svarande mot parametervärdena t och $t + \Delta t$ till kurvan (**??**). Hur fås nu tangentvektorn $(x'(t), y'(t))$?

Övning 3: Beräkna nu tangentvektorn till kurvan i övning 1c) ovan, för $t = \pi$.

7. Enligt (2) blir $s(t)$ strängt växande varför $s = s(t) \Leftrightarrow t = t(s)$. Sätt in $t = t(s)$ i (1), dvs inför båglängden som ny parameter. Bilda nu tangentvektorn med avseende på båglängden s, dvs $(dx/ds, dy/ds)$. Vad blir dess längd?
8. Exercises 8.4: 1 , 5 , 7 , 11 , 13

Kurvor på formen $f(x,y) = C$, där $f : R^2 \rightarrow R$ och C är en konstant. Kurvan kallas nivåkurva till funktionen f på nivå C. Är Du orienterare kanske Du tänker på höjdkurvor på en karta. Ett välkänt exempel är $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$. Vill vi rita nivåkurvor till mera komplicerade funktioner får vi ta till dator.

Exempel/övning 4: Låt $f(x,y) = (x^2 + \frac{1}{2}y^2)^2 - x^2 + \frac{1}{2}y^2$ och $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. Vi skall rita nivåkurvor och även grafiskt åskådliggöra ytan $z = f(x,y)$ i *Matlab*. Låt mig nämna att liknande verksamheter ingår i bonusuppgift 1.
Vi skall använda *Matlab*-kommandona *meshgrid, contour* och *mesh*. Först skall funktionen beräknas för alla knutpunkterna i ett tänkt nät.

- > x=-1:2/100:1; y=x;   % maskvidden 0.02
  > [X,Y]=meshgrid(x,y);   % för varje knutpunkt stoppas x-koordinaten i X och motsvarande för y.
  > F=(X.^2+0.5*Y.^2).^2-X.^2+0.5*Y.^2;   % det var nu lätt att tabellera f.
  > contour(x,y,F);
  > figure; mesh(x,y,F);
- Bestäm största och minsta värden med kommandona *max* och *min*.
- Rita nu kurvorna på nivåerna -0.1 , 0 , 0.1 , 0.2 , 0.3. Lägg märke till att för att erhålla *endast* kurvan $f(x,y) = 0$, måste vi ge kommandot contour(x,y,F,[0 0]), och motsvarande för andra nivåer.

Övning 5: Ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ kan på parameterform skrivas $x = a\cos(t)$, $y = b\sin(t)$. Uttryck ellipsens båglängd med en integral. Beräkna integralen numeriskt för $a = 2$ och $b = 1$.

Storgruppövning v5:2

I huvudsak vanlig föreläsning om *Matlab* och diverse exempel relaterade till kap 7 och 8.