Lösningsförslag till tenta 2006-03-10
Matematisk analys D

Uppgift 1.

(a) Vi kan naturligtvis använda Taylorutveckling, men väljer här en specialvariant.
Förläng nämnare och täljare med $1+\cos(x)$ och utnyttja den trigonometriska ettan

$$\frac{\sin^2(x)(1+\cos(x))}{(1-\cos(x))(1+\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)(1+\cos(x))}{1-\cos^2(x)} = 1+\cos(x)$$

och saken är klar.
Svar: Gränsvärdet är 2.

(b) Se på ekvationen $y = e^{2x} + 2e^x + 1$, där x är obekant och $y > 1$.

$$(e^x)^2 + 2e^x + 1 - y = 0 \Leftrightarrow e^x = -1 \pm \sqrt{y} = \sqrt{y} - 1$$

Således är $x = \ln(\sqrt{y} - 1)$. Byt nu $x \leftrightarrow y$ och vi får
Svar: $f^{-1}(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$

Uppgift 2. Både skivformeln och metoden med cylindriska skal fungerar väl.

Vi presenterar skivformelvarianten här. Rita själv figurer!

$$\int_0^1 \pi(e^2 - y^2)dx = \pi e^2 - \pi \int_0^1 e^{2x} dx$$

Vi får nu efter lite räknande
Svar: $\pi \frac{e^2+1}{2}$

Uppgift 3.

(a)

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} = -3x^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = -x^3 + C$$

Villkoret $y(0) = 1$ ger $C = -1$ och $\frac{1}{y} = 1 + x^3$.
Svar: $y = \frac{1}{1+x^3}$.

(b) Ansatsen $y = e^{rx}$ ger den karakteristiska ekvationen

$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$$

Allmän lösning till ekvationen blir således

$$y(x) = (A + Bx)e^x$$

Villkoret $y(0) = 0$ ger $A = 0$ och vi får $y(x) = Bxe^x$.
Derivatan $y'(x) = B(e^x + xe^x)$. Nu ger villkoret $y'(0) = 1$ att $B = 1$.
Svar: $y(x) = xe^x$.

Uppgift 4.

(a) Vi har $z^3 = i = e^{i(\pi/2+2k\pi)}$ och alltså blir rötterna

$$z_k = e^{i(\pi/6+2/3k\pi)} \quad , \quad k = 0, 1, 2$$

Vill vi ha svaren på allmänn form blir $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ och $z_2 = -i$.

(b) Sätt $z = x + iy$ och skriv ekvationen som

$$e^z = e^x e^{iy} = \sqrt{8}e^{i(3\pi/4+2k\pi)}$$

Detta ger $e^x = \sqrt{8}$ och $y = 3\pi/4 + 2k\pi$.
Svar: $z = \ln\sqrt{8} + i(3\pi/4 + 2k\pi)$, för alla $k \in Z$.

Uppgift 5.

(a) Karakteristisk ekvation $r^2 + 2r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm i$. Allmän lösning till homogen ekvation

$$y(t) = e^{-t}(A\cos(t) + B\sin(t))$$

(b) Vi skall bestämma en partikulärlösning. Se på ekvationen

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-t} \cdot e^{it} = e^{(-1+i)t} \tag{1}$$

Imaginärdelen till en lösning till (1) blir en lösning till den inhomogena ekvationen i texten. Eftersom högerledet i (1) är en lösning till den homogena ekvationen gör vi variablebytet $y = ze^{ct}$, där $c = -1 + i$. Efter en del arbete fås ekvationen i z till

$$z'' + 2iz' = 1$$

En lösning till denna är $z_p = -\frac{it}{2}$ och en lösning till (1) blir $y_p = -\frac{it}{2}e^{-t+it}$ och en lösning till ekvationen i texten blir $Im(y_p) = -\frac{t}{2}e^{-t}\cos(t)$. Allmän lösning till ekvationen i texten blir

$$y(t) = e^{-t}(A\cos(t) + B\sin(t) - \frac{t}{2}\cos(t))$$

Villkoret $y(0) = 0$ ger $A = 0$ och efter en stund erhålles $B = 3/2$ med hjälp av villkoret $y'(0) = 1$.

Svar: $y(t) = e^{-t} \cdot \frac{3\sin(t) - t\cos(t)}{2}$