Lösningsförslag till tentan Matematisk analys D, 20060828

Uppgift 1.

(a)

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$$

Svar: Gränsvärdet är $\frac{1}{2}$

(b) Vi har den kända Taylorutvecklingen

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \;\Rightarrow\; \cos^2(x) = 1 - x^2 + O(x^4)$$

Nu får vi direkt omskrivningen

$$\frac{\cos^2(x)-1}{x^2} = \frac{-x^2+O(x^4)}{x^2} = -1 + O(x^2)$$

Svar: Gränvärdet är -1
Anmärkning. Det går naturligtvis även att utnyttja en känd trigonometrisk formel samt att $\sin(x)/x \;\to\; 1$, då $x \;\to\; 0$.

Uppgift 2. Vi använder skivformeln. Lägg in ett plan vinkelrät mot x-axeln, då blir snittytan en ring vars area ges av

$$A(x) = \pi 2^2 - \pi(1+x^2)^2$$

Nu fås volymen

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)dx = 2\int_0^1 A(x)dx = ... = \frac{64}{15}\pi$$

Svar: Volymen av rotationkroppen är $64\pi/15$

Uppgift 3.

(a) Vi har $(1+i)/(1-i) = i$, varför vi skriver ekvationen som $z^2 = e^{i(\pi/2+2k\pi)}$. Rötterna blir $z_k = e^{i(\pi/4+k\pi)}$, för $k = 0, 1$ eller $\pm e^{i\pi/4}$. Svar: $\pm(1+i)/\sqrt{2}$

(b) Låt $z = a + iy$ vara en punkt på linjen och se på $w = e^{a+iy} = e^a \cdot e^{iy}$. Vi ser att $|w| = e^a$ samt att argumentet för w är y.
Svar: Cirkel med radie e^a och medelpunkt $(0, 0)$, vilken genomlöpes oändligt många gånger.

Uppgift 4.
Taylorutveckla $E(h)$ kring 0 t o m fjärdegradstermer.

$$E(h) = E(0) + hE'(0) + h^2E''(0)/2 + h^3E'''(0)/6 + h^4E'''(0)/24 + \mathbf{O}(h^5)$$

Detta kan exempelvis göras genom att bestämma derivator till $E(h)$. Lägg märke till att

$$E'(h) = f(h) - \frac{1}{2}(f(0) + f(h)) - \frac{h}{2}f'(h)$$

Nu kan Du lätt derivera vidare och beräkna derivatorna i Taylorutvecklingen

$$E(0) = 0, E'(0) = 0, E''(0) = 0, E'''(0) = -f''(0)/2, E''''(0) = -f'''(0)$$

Svar: $E(h) = -h^3f''(0)/12 - h^4f'''(0)/24 + \mathbf{O}(h^5)$

Uppgift 5.

(a) Efter enkel omskrivning har vi den separabla ekvationen

$$(1+y^2)^{-1}\frac{dy}{dx} + (1+x^2)^{-1} = 0 \ ,$$

med allmän lösning $\arctan(y) + \arctan(x) = C$. Eftersom kurvan skall gå genom $(2,0)$ fås lösningen

$$y = \tan(\arctan(2) - \arctan(x))$$

Med hjälp av sambandet $\tan(\arctan(t)) = t \ , \ \forall \ t \in R$ och additionsteoremet för tan-funktionen, se BETA sidan 124, fås

Svar: $y = \frac{2-x}{1+2x}$

(b) En lösning till ekvationen är $y_p = -1/2$. Allmän lösning till homogen ekvation $\ell(y) = 0$ bestämmes med hjälp av den karakteristiska ekvationen $r^2 + r - 2 = 0$. Vi får $y_h = Ae^x + Be^{-2x}$, varför allmän lösning till den $\ell(y) = 1$ blir

$$y(x) = Ae^x + Be^{-2x} - \frac{1}{2}$$

De båda villkoren på lösningen ger direkt att
Svar: $y(x) = \frac{e^{-2x}-1}{2}$