Lösningsförslag till tenta 2008-03-14
Matematisk analys D

Uppgift 1.

(a) Taylorutvecklingar

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)\ ,\ \sin(2x) = 2x + O(x^3)\ ,\ \sin^2(2x) = 4x^2 + O(x^4)$$

Vi får nu omedelbart

$$\frac{\cos(x) - 1}{\sin^2(2x)} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)}{4x^2 + O(x^4)}$$

Förkorta med x^2 och vi får direkt
Svar: Gränsvärdet är $-\frac{1}{8}$

(b) Integralkalkylens huvudsats och kedjeregeln ger

$$G'(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} \cdot \frac{d\cos(x)}{dx} = |\sin(x)| \cdot (-\sin(x))$$

där vi också använt den trigonometriska ettan. Observera att $|\sin(x)| = \sin(x)$ för $0 \leq x \leq \pi$.
Svar $G''(x) = -2\sin(x)\cos(x) = -\sin(2x)$

Uppgift 2.

Rita figur! Skivformeln ger att volymen V kan skrivas

$$V = \pi \int_0^{\pi^{\frac{1}{3}}} x^2 \sin(x^3) dx = \pi \left[-\frac{\cos(x^3)}{3} \right]_0^{\pi^{\frac{1}{3}}} .$$

Vi får således att $V = \frac{\pi}{3}(-\cos(\pi) + \cos(0)) = \frac{2}{3}\pi$
Svar: Volymen är $\frac{2}{3}\pi$.

Uppgift 3.

$$f(x) = \frac{1}{(\arctan(x) + 1)^2} \quad , \quad x \geq 0$$

Eftersom $\arctan(x)$ är strängt växande blir $f(x)$ strängt avtagande och alltså inverterbar. Beteckna värdemängden till f med V_f

$$V_f = \{y : \frac{1}{(\pi/2 + 1)^2} \leq y \leq 1\}$$

För att bestämma inversen ser vi på ekvationen

$$f(x) = y \in V_f \ \Leftrightarrow\ \arctan(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{y}} \ \Leftrightarrow$$

$$\arctan(x) = \frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \Leftrightarrow\ x = \tan\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1\right) = f^{-1}(y)$$

Svar: $f^{-1}(x) = \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)\ ,\ x \in V_f$

Uppgift 4. Låt $z_0 = 1+i$, då blir även $\bar{z_0}$ en rot, ty den algebraiska ekvationen

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + az^2 - 8z + 8 = 0$$

har reella koefficienter. Enligt faktorteoremet blir

$$(z - z_0)(z - \bar{z_0}) = z^2 - 2Re(z_0)z + |z_0|^2 = z^2 - 2z + 2$$

en delare till polynomet $p(z)$. Detta kan skrivas

$$z^4 - 2z^3 + az^2 - 8z + 8 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + bz + 4)$$

varur både a och b kan bestämmas

$$z^3 : \quad -2 = b - 2 \quad , \quad z^2 : \quad a = 4 - 2b + 2 \ \Leftrightarrow b = 0 \ , \ a = 6$$

Vi får alltså andragradsekvationen $z^2 + bz + 4 = z^2 + 4 = 0$
Svar: $a = 6$ och rötter $1 \pm i$ och $\pm 2i$

Uppgift 5.

(a) Integrerande faktor $e^{2\int \frac{dt}{t}} = e^{2\ln(t)} = t^2$ och ekvationen kan skrivas

$$(t^2y)' = t^2e^{t^3} \ \Rightarrow \ t^2y = \frac{e^{t^3}}{3} + C$$

Begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ ger $C = -\frac{e}{3}$.
Svar: $y = \frac{t^{-2}}{3}(e^{t^3} - e)$

(b) Lösningen till den homogena ekvationen $y'' + 4y = 0$ är $A\cos(2t) + B\sin(2t)$. En s k partikulärlösning fås med ansatsen $y_p = Ke^{-t}$, där K är en konstant. Insättning i den inhomogena ekvationen ger $K = \frac{2}{5}$.
Den allmänna reellvärda lösningen fås nu som
Svar: $y(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t) + \frac{2}{5}e^{-t}$.