Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet
Matematik

Tentamen: Matematisk analys
Chalmers: TMV170 eller Universitetet: MMG D30
OBS! Ange precis ett av ovanstående alternativ på försättsbladet.

Datum: 2010-03-12 **Tid:** 0830-1230 **Salar:** V

Förfrågningar: tel 0703-088304

Lösningar: Kommer att finnas på nätet
www.math.chalmers.se/˜goran/Danalys

Betygsgränser Chalmers: Poäng 20, 30 resp 40, ger betyget 3, 4 resp 5.

Betygsgränser Universitet: Poäng 20 resp 35, ger betyget G resp VG.

Skrivningsvisning: Se kurssidan den 19/3.

Hjälpmedel:

- Högst en av formelsamlingarna Beta eller Physics handbook. Observera *inga* miniräknare.
- **Avsluta om möjligt varje deluppgift med: Svar:** $\cdots$

Uppgift 1.

(a) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\pi x - \ln(1+\pi x)}{\sin^2(x)} \quad (5p)$$

(b) Ange lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$4y^3 \frac{dy}{dx} = x^{-2} \quad , \quad y(1) = 1 \quad , \quad x \geq 1 \ ,$$

på så enkel form som möjligt. (5p)

Uppgift 2. I ett ortonormerat koordinatsystem O_{xy} roteras området

$$D = \{ \ (x, y) : e^{(x^2)} \leq y \leq e \ , \ 0 \leq x \leq 1 \ \}$$

kring y–axeln. Bestäm volymen av den så erhållna rotationskroppen. Det finns en utmärkt möjlighet till felkontroll. (10p)

Uppgift 3. Betrakta funktionen

$$x \;\to\; f(x) = e^{4x} + 2e^{2x}$$

definierad för alla reella x. Ange värdemängden till f, dvs

$$V_f = \{y = f(x) : x \in R\}.$$

Bestäm inversen $f^{-1}(x)$, till f, uttryckt med hjälp av elementära funktioner och ange även dess defintionsmängd $D_{f^{-1}}$. (10p)

Uppgift 4. Bestäm den reella konstanten a nedan, så att den algebraiska ekvationen

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + az^2 - 4z + 12 = 0$$

får en rot $z_0 = 1 + i\sqrt{5}$. Ange slutligen alla rötter till ekvationen.
Du bör nog undvika att beräkna $p(z_0)$, för att bestämma a! (10p)

Uppgift 5. Vi vill lösa begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + y = \frac{2}{2+x}\cos(x) - \frac{1}{(2+x)^2}\sin(x) + e^{-x} \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = \ln(2),$$

där x är oberoende variabel. Definiera för senare bruk $\ell(y) = y'' + y$. Således är $y \longrightarrow \ell(y)$ en linjär avbildning.

(a) Sätt $y_1 = \ln(2+x)\sin(x)$ och bestäm $\ell(y_1)$ på en form som relaterar till ekvationen ovan. (3p)

(b) Ange nu den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$\ell(y) = \frac{2}{2+x}\cos(x) - \frac{1}{(2+x)^2}\sin(x) + e^{-x} \quad (4p)$$

(c) Lös det ursprungliga begynnelsevärdesproblemet. (3p)

Lycka till !