MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys TMV170/MMGD30, 2016-08-23, TID(8.30-12.30)

Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare
Telefonvakt: Anders Martinsson, ankn 5325

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = e^{(\ln(2x))^2} \cdot x^x$$

samt beräkna $f'(\frac{1}{2})$. Förenkla så långt som möjligt.

(4+2p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' + y\cos x = \sin 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^x \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(6p)

4. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} e^x \cdot (\ln(1+e^x) - x).$$

(6p)

V.G.V.

5. Betrakta det område som begränsas av x–axeln, $x = 0$, $x = 2$ samt grafen till

$$f(x) = \sqrt{|1-x|},\ x \in [0, 2].$$

Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då området roterar kring y–axeln.

(6p)

6. Bestäm den tangent till funktionskurvan $y = x^3$ som är parallell med den räta linjen $y = 2x + 1$ och som skär den negativa delen av y-axeln. Bestäm också denna tangents skärningspunkt med x-axeln.

(6p)

7. Sätt

$$z = \frac{(1+i)^{50}}{(1+i\sqrt{3})^{30}}.$$

Bestäm realdelen av z och imaginärdelen av z.

(6p)

8. Betrakta differentialekvationen

$$\begin{cases} x^2y'' + 3xy' + 2y = x^4,\ x > 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Tips: Byt oberoende variabeln x mot $t = \ln x$.

(7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

Lösningsskisser till tentamen TMV170/MMGD30 den 23/8 2016

① Sätt $f(x) = e^{(\ln(2x))^2} \cdot x^x$.

Beräkna $f'(x)$ och $f'(\frac{1}{2})$.

Lösning: $\frac{d}{dx}\left(e^{(\ln(2x))^2} \cdot x^x\right) = e^{(\ln(2x))^2} \cdot 2\ln(2x) \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 \cdot x^x +$

$+ e^{(\ln(2x))^2} \cdot \frac{d}{dx} e^{x\ln x} = e^{(\ln(2x))^2} \ln(2x) \cdot \frac{2}{x} \cdot x^x +$

$+ e^{(\ln(2x))^2} \cdot e^{x\ln x} \cdot (\ln x + 1) =$

$= e^{(\ln(2x))^2} x^x \left(\frac{2}{x}\ln(2x) + \ln x + 1\right), \quad x > 0$

$f'(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} (\ln\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 - \ln 2)$.

Svar: se ovan

② Lös $y' + y\cos x = \sin 2x$, $y(0) = 0$

Lösning: Integrerande faktor: $e^{\int \cos x\,dx} = e^{\sin x}$

Multiplicera diff-ekv med denna. Vi får

$\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{\sin x}\right) = \sin 2x \cdot e^{\sin x}$

Integration av högerledet.

$\int \sin 2x\, e^{\sin x}\,dx = \int 2\sin x\, e^{\sin x} \cos x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array} \right\} =$

$= \int 2te^t\,dt = \{\text{partiell integration}\} = 2te^t - \int 2e^t\,dt =$

$= 2te^t - 2e^t + C = 2(\sin x - 1)e^{\sin x} + C$

Detta ger $y(x) \cdot e^{\sin x} = 2(\sin x - 1)e^{\sin x} + C$ dvs

$y(x) = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}$

Villkoret $y(0) = 0$ bestämmer C. Vi har $C = 2$

Svar: $y(x) = 2\sin x - 2 + 2e^{-\sin x}$

③ Lös $y'' + 2y' + y = e^x \cos x$, $y(0) = y'(0) = 0$

Lösning: Karakteristiska ekv $r^2 + 2r + 1 = 0$ ger $r_{1,2} = -1$

Vi har homogenlösningen $y_h(x) = (A + Bx)e^{-x}$

Ansätt en partikulär lösning $y_p(x) = e^x(a\cos x + b\sin x)$

Derivering och insättning i diff-ekv.

$y_p'(x) = (a + b)e^x\cos x + (b - a)e^x \sin x$

$y_p''(x) = (a + b + b - a)e^x\cos x + (b - a - a - b)e^x \sin x =$

$= 2be^{x}\cos x - 2ae^{x}\sin x$.

Alltså

$2be^{x}\cos x - 2ae^{x}\sin x + 2\left((a+b)e^{x}\cos x + (b-a)e^{x}\sin x\right) +$

$+ ae^{x}\cos x + be^{x}\sin x = e^{x}\cos x$

Vi får

$$\begin{cases} 2b + 2(a+b) + a = 1 \\ -2a - 2(b-a) + b = 0 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} a = \frac{3}{25} \\ b = \frac{4}{25} \end{cases}$$

Detta ger $y_p(x) = e^{x}\left(\frac{3}{25}\cos x + \frac{4}{25}\sin x\right)$

Allmänna lösningen: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) =$

$= (A+Bx)e^{-x} + e^{x}\left(\frac{3}{25}\cos x + \frac{4}{25}\sin x\right)$

Villkoren $y(0)=0$, $y'(0)=0$ bestämmer A och B

$$\begin{cases} 0 = y(0) = A + \frac{3}{25} \\ 0 = y'(0) = -A + B + \frac{3}{25} + \frac{4}{25} \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -\frac{3}{25} \\ B = -\frac{10}{25} \end{cases}$$

Svar: $y(x) = \left(-\frac{3}{25} - \frac{10}{25}x\right)e^{-x} + e^{x}\left(\frac{3}{25}\cos x + \frac{4}{25}\sin x\right)$.

(4) Beräkna $\lim_{x\to\infty} e^{x}\cdot\left(\ln(1+e^{x}) - x\right)$

Lösning: $e^{x}\cdot\left(\ln(1+e^{x}) - x\right) =$

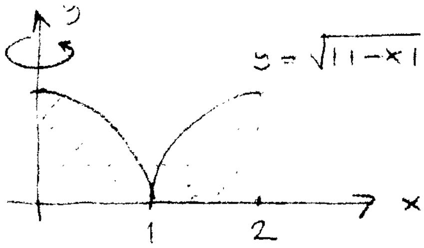
$= e^{x}\cdot\left(\ln(e^{x}(1+e^{-x})) - x\right) = e^{x}\cdot\left(\ln(e^{x}) + \ln(1+e^{-x}) - x\right) =$

$= e^{x}\cdot\ln(1+e^{-x}) = \{\ln(1+t) = t + O(t^2),\ t\to 0\} =$

$= e^{x}\cdot\left(e^{-x} + O((e^{-x})^2)\right) = 1 + O(e^{-x}) \to 1,\ x\to\infty$.

Svar: 1 .

(5) Beräkna rotationsvolymen



Lösning: Vi ska beräkna $2\pi\int_0^2 x\sqrt{|1-x|}\,dx$

$\int_0^2 x\sqrt{|1-x|}\,dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx + \int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$;

$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = \{t = \sqrt{1-x},\ x = 1-t^2,\ dx = -2t\,dt,\ x=0 \leftrightarrow t=1,\ x=1 \leftrightarrow t=0\} =$

$$= \int_0^1 (1-t^2)\cdot t \cdot 2t\,dt = \int_0^1 (2t^2-2t^4)\,dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5\right]_0^1 =$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5}.$$

$$\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx = \left\{ t = \sqrt{x-1},\ x = t^2+1,\ dx = 2t\,dt,\ x=1 \leftrightarrow t=0,\ x=2 \leftrightarrow t=1 \right\} =$$
$$= \int_0^1 (t^2+1)\cdot t\cdot 2t\,dt = \int_0^1 (2t^4+2t^2)\,dt = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}.$$

Alltså får vi

$$2\pi \int_0^2 x\sqrt{|1-x|}\,dx = 2\pi\cdot\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}$$

Svar: $\frac{8\pi}{3}$

(6) Bestäm den tangent till $y = x^3$ som är parallell med $y = 2x+1$ och skär negativa delen av y-axeln. Bestäm denna tangents skärning med x-axeln

<u>Lösning</u>: Vi bestämmer först de tangenter till funktionskurvan $y = x^3$ som är parallella med $y = 2x+1$

$2 = f'(x) = 3x^2$ ger $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ och alltså finns två tangenter parallella med $y = 2x+1$, nämligen

$$\begin{cases} y = 2\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} & (*) \\ y = 2\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} & (**) \end{cases}$$

Den sökta tangenten är $(*)$ och dennas skärning med x-axeln sker i $x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Svar: $y = 2\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

(7) $z = \frac{(1+i)^{50}}{(1+i\sqrt{3})^{30}}$. Bestäm Re z och Im z

<u>Lösning</u>: $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ ger $(1+i)^{50} = (\sqrt{2})^{50}\cdot e^{i\frac{50\pi}{4}} =$
$$= 2^{25}\cdot e^{i(12\pi + \frac{\pi}{2})} = 2^{25}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^{25}\cdot i\ ;$$

$1 + i\sqrt{3} = 2\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ ger $(1+i\sqrt{3})^{30} = 2^{30}\cdot e^{i10\pi} = 2^{30}$

Alltså gäller $z = \frac{2^{25} i}{2^{30}} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 i = \frac{1}{32} i$

Svar: $\operatorname{Re} z = 0$; $\operatorname{Im} z = \frac{1}{32}$

(8) Lös $x^2y'' + 3xy' + 2y = x^4$, $x>0$, $y(1) = y'(1) = 0$

<u>Lösning</u>: Sätt $y(x) = \tilde{y}(t(x))$ där $t = \ln x$, $x > 0$

Kedjeregeln ger

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\tilde{y}(t(x)) = \tilde{y}'(t)\cdot\frac{dt}{dx} = \tilde{y}'(t(x))\cdot\frac{1}{x}$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\tilde{y}'(t(x))\cdot\frac{1}{x}\right) = \tilde{y}''(t)\cdot\frac{1}{x^2} - \tilde{y}'(t)\frac{1}{x^2}$$

Insättning i diff-ekv ger

$$\tilde{y}'' - \tilde{y}' + 3\tilde{y}' + 2\tilde{y} = e^{4t}$$

dvs $\tilde{y}'' + 2\tilde{y}' + 2\tilde{y} = e^{4t}$.

Homogenlösningen: Kar. ekv $r^2+2r+2=0$ ger

$r^2+2r+2 = (r+1)^2+1 = (r+1)^2 - i^2 = (r+1+i)(r+1-i)$ dvs

$r_{1,2} = -1 \pm i$. Detta ger $\tilde{y}_h(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t)$

Partikulärlösning: Ansätt $\tilde{y}_p(t) = ae^{4t}$, Derivering och insättning i diff.-ekv ger

$ae^{4t}(16+2\cdot 4+2) = e^{4t}$ dvs $a = \frac{1}{26}$

Detta ger $\tilde{y}(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t) + \frac{1}{26}e^{4t}$.

Återstår att bestämma A och B. Vi har

$$y(x) = \tilde{y}(\ln x) = e^{-\ln x}(A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x)) + \frac{1}{26}e^{4\ln x} =$$
$$= \frac{1}{x}(A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x)) + \frac{1}{26}x^4 \quad , x>0$$

Vi har nu

$$\begin{cases} 0 = y(1) = A + \frac{1}{26} \\ 0 = y'(1) = -A + B + \frac{4}{26} \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{26} \\ B = -\frac{5}{26} \end{cases}$$

<u>Svar:</u> $y(x) = -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{26}\cos(\ln x) + \frac{5}{26}\sin(\ln x)\right) + \frac{1}{26}x^4$

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys TMV170/MMGD30, 2016-04-05, TID(8.30-12.30)

Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare
Telefonvakt: Johannes Borgqvist, ankn 5325

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \ln(e + x^{\cos x}),\ x > 0$$

samt beräkna $f'(\frac{\pi}{4})$. Förenkla så långt som möjligt.

(4+2p)

2. Lös differentialekvationen

$$y' - 2xy = x^3.$$

Bestäm också den lösning som uppfyller $y(0) = 0$.

(5+2p)

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + y' = \cos(3x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

(6p)

4. Beräkna alla reella tal a sådana att

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x(\cos(ax) - 1)} = 1.$$

(6p)

V.G.V.

5. Betrakta det område som begränsas av x–axeln, $x = 0$, $x = 2\pi$ samt grafen till

$$f(x) = |\sin x|, \; x \in [0, 2\pi].$$

Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då området roterar kring y–axeln.

(6p)

6. Betrakta den tangent till funktionskurvan $y = x^4$ som är vinkelrät mot den räta linjen $y = x$. Bestäm denna tangents skärning med y-axeln.

(6p)

7. Sätt $z = (1 + i)^{100}$. Bestäm realdelen av z och imaginärdelen av z.

(6p)

8. Låt $A(t)$ beteckna arean av det område i xy-planet som begränsas av linjestycket mellan $(0, 1)$ och (t, e^t) (där $t > 0$) och kurvan $y = e^x$ mellan samma punkter. Beräkna

$$\lim_{t \to 0+} \frac{A(t)}{t^3}.$$

(7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

Lösningsförslag till TMV170/MMGD30 den 5/4 2016

(1) $f(x) = \ln(e + x^{\cos x})$, $x > 0$

Beräkna $f'(x)$ och $f'(\frac{\pi}{4})$

Lösning: Med kedjeregeln fås för $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{e + e^{\cos x \cdot \ln x}} \cdot e^{\cos x \cdot \ln x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{e + x^{\cos x}} \cdot x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x\right)$$

$$f'(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{e + (\frac{\pi}{4})^{1/\sqrt{2}}} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \ln(\tfrac{\pi}{4})\right) =$$

$$= \frac{1}{e^{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\frac{\pi}{4})} + 1} \cdot \frac{4 - \pi \ln\frac{\pi}{4}}{\pi\sqrt{2}}$$

Svar: se ovan

(2) Lös $y' - 2xy = x^3$. Beräkna den lösning som uppfyller $y(0) = 0$

Lösning: Diff-ekv är linjär av 1:a ordning och löses med integrerande faktor $e^{\int(-2x)dx} = e^{-x^2}$. Vi har

$$\frac{d}{dx}\left(y(x) \cdot e^{-x^2}\right) = x^3 e^{-x^2}$$

Integration ger

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \{t = x^2,\ dt = 2x\,dx\} = \frac{1}{2}\int t e^{-t} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t(-e^{-t}) - \int(-e^{-t})dt\right) = \frac{1}{2}\left(-te^{-t} - e^{-t}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2} + C$$

Detta ger oss $y(x) = -\frac{1}{2}(x^2+1) + Ce^{+x^2}$.

Villkoret $y(0) = 0$ ger $C = \frac{1}{2}$

Svar $y(x) = -\frac{1}{2}(x^2+1) + Ce^{+x^2}$

$y(x) = -\frac{1}{2}(x^2+1) + \frac{1}{2}e^{+x^2}$

(3) Lös $y'' + y' = \cos(3x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Lösning: Vi bestämmer först den allmänna lösningen till differentialekvationen.

$y = y_h + y_p$ där $y_h(x)$ är den allmänna lösningen till motsvarande homogena diff.-ekv och $y_p(x)$ är en partikulärlösning.

$\boxed{y_h}$: Karakteristiska ekvationen $0 = r^2 + r = (r-0)(r+1)$ har rötterna $r_1 = 0$, $r_2 = -1$ vilket ger

$y_h(x) = A + Be^{-x}$, $A, B \in \mathbb{R}$

$\boxed{y_p}$: Ansätt $y_p(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Derivering och insättning i diff-ekv ger

$$-9a\cos(3x) - 9b\sin(3x) - 3a\sin(3x) + 3b\cos(3x) = \cos(3x)$$

dvs $(-9a + 3b - 1)\cos(3x) + (-9b - 3a)\sin(3x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} -9a + 3b = 1 \\ -9b - 3a = 0 \end{cases} \quad \text{har lösningen} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{10} \\ b = \frac{1}{30} \end{cases}$$

Detta ger $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A + Be^{-x} - \frac{1}{10}\cos(3x) + \frac{1}{30}\sin(3x)$

Konstanterna A, B bestäms av villkoren $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

dvs

$$\begin{cases} A + B - \frac{1}{10} = 0 \\ -B + \frac{1}{10} = 1 \end{cases} \quad \text{som ger} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{9}{10} \end{cases}$$

Svar: $y(x) = 1 - \frac{9}{10}e^{-x} - \frac{1}{10}\cos(3x) + \frac{1}{30}\sin(3x)$

(4) Bestäm alla $a \in \mathbb{R}$ sådana att $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x(\cos(ax) - 1)} = 1$

Lösning: Standardutvecklingarna

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^5 \cdot B_1(x)$ $\quad B_1(x)$ begränsad kring $x = 0$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^4 B_2(x)$ $\quad B_2(x)$ – – – –

ger

$$\frac{\sin x - x}{x(\cos(ax) - 1)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + x^5 B_1(x)}{-\frac{(ax)^2}{2} \cdot x + x^5 a^4 B_2(ax)} = \frac{1 - 6x^2 B_1(x)}{3a^2 - 6a^4 x^2 B_2(ax)}$$

Vi får $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x(\cos(ax) - 1)} = 1$ om och endast om

$3a^2 = 1$, dvs $a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Svar: $a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

(5) Bestäm volymen av den rotationskropp som fås då området begränsat av x-axeln, $x = 0$, $x = 2\pi$ och $y = |\sin x|$, $x \in [0, 2\pi]$ roterar kring y-axeln

Lösning: Den sökta volymen ges av

$$V = 2\pi\int_0^{2\pi} x\cdot|\sin x|\,dx = 2\pi\left(\int_0^{\pi} x\cdot\sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\cdot\sin x\,dx\right)$$

Partiell integration ger

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Detta ger

$$V = 2\pi\left(\left[\sin x - x\cos x\right]_0^{\pi} - \left[\sin x - x\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}\right) =$$
$$= 2\pi\left(\pi - \left(-2\pi - (\pi)\right)\right) = 8\pi^2$$

Svar: $8\pi^2$

(6) Bestäm skärningspunkten mellan y-axeln och den tangent till kurvan $y = x^4$ som är vinkelrät mot linjen $y = x$

Lösning: Den sökta tangenten ges av $y = -x + m$ där vi utnyttjat att tangenten ska vara vinkelrät mot $y = x$. För att bestämma m söker vi tangeringspunkten (a, b) för $y = x^5$ med denna tangent. Vi har

$$\begin{cases} 4a^3 = -1 \\ -a + m = a^4 \ (= b) \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ m = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}} \end{cases}$$

Skärningspunkten mellan tangenten och y-axeln är $(0, m)$

Svar: Sökta punkten har koordinaterna $\left(0, -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}\right)$

(7) $z = (1+i)^{100}$ Bestäm $\operatorname{Re} z$ och $\operatorname{Im} z$

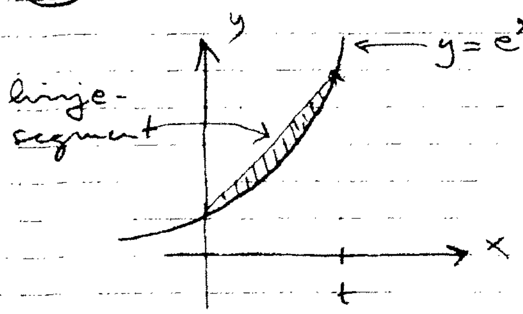
Lösning: $1+i$ kan skrivas på polär form som $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$. Detta ger $(1+i)^{100} = (\sqrt{2})^{100}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 100} =$

$$= 2^{50}\cdot e^{i2\pi} = 2^{50}e^{i\pi} = -2^{50}.$$

Alltså

Svar: $\operatorname{Re} z = -2^{50}$, $\operatorname{Im} z = 0$.

(8) $t>0$. $A(t)$ = arean av området i figuren



Beräkna

$$\lim_{t\to 0+} \frac{A(t)}{t^3}.$$

Lösning: Ekvationen för räta linjen genom $(0,1)$ och (t, e^t) ges av

$$y = \frac{e^t-1}{t}\cdot x + 1$$

Vi får då för $t>0$

$$A(t) = \int_0^t \left(\frac{e^t-1}{t}\cdot x + 1 - e^x\right)dx = \frac{e^t-1}{t}\cdot\frac{t^2}{2} + t - e^t + 1 =$$

$$= e^t\left(\frac{t}{2}-1\right) + \frac{t}{2} + 1.$$

Standardutvecklingen $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^4\cdot B(t)$,

$B(t)$ begränsad i omgivning kring $t=0$ ger

$$A(t) = \left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+t^4B(t)\right)\left(\frac{t}{2}-1\right) + \frac{t}{2} + 1 =$$

$$= \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)t^3 + t^4\left(\frac{1}{12} - B(t)\right)$$

Alltså $\lim_{t\to 0+} \frac{A(t)}{t^3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Svar: $\frac{1}{12}$

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys TMV170/MMGD30, 2016-03-17, TID(14.00-18.00)

Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare
Telefonvakt: Tim Cardilin, ankn 5325

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = (1 + (\sin(x))^2)^{\cos(3x)}$$

samt beräkna $f'(\frac{\pi}{6})$. Förenkla så långt som möjligt.

(4+2p)

2. Lös differentialekvationen

$$y' + (2x - 1)y + 2e^{-x-x^2} = 0.$$

Bestäm också den lösning som har extremvärde för $x = 0$.

(5+2p)

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + y = x^2 + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

(6p)

4. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{\frac{x^2}{2}} \cos x}{x^4}.$$

(6p)

V.G.V.

5. Betrakta det område som begränsas av x-axeln, $x = 0$, $x = 2\pi$ samt grafen till

$$f(x) = |\sin x|, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då området roterar kring x-axeln.

(6p)

6. Bestäm den tangent till funktionskurvan $y = x^4$ som är vinkelrät mot räta linjen $y = 2x$.

(6p)

7. Sätt $z = (1 + i\sqrt{3})^{10}$. Bestäm realdelen av z och imaginärdelen av z.

(6p)

8. Betrakta differentialekvationen

$$y'' - y' \cos x + y \sin x = 0$$

som har en lösning

$$v(x) = e^{\sin x}.$$

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen genom att ansätta $y(x) = v(x)z(x)$. Bestäm också den lösning som uppfyller $y(0) = y'(0) = 1$.

(5+2p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

Kortfattade lösningsskisser till tentamen TMV170/MMGD30 den 17/3 2016

---

① $f(x) = (1+\sin^2 x)^{\cos(3x)}$

Beräkna $f'(x)$ och $f'(\frac{\pi}{6})$

Lösning:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\, e^{\cos(3x)\cdot\ln(1+\sin^2 x)} =$$
$$= (1+\sin^2 x)^{\cos(3x)}\cdot\left(-3\sin(3x)\cdot\ln(1+\sin^2 x) + \cos(3x)\,\frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\right)$$

$$f'(\tfrac{\pi}{6}) = (1+(\tfrac{1}{2})^2)^0\cdot(-3\ln(1+(\tfrac{1}{2})^2)) = -3\ln\frac{5}{4} = 3\ln(\tfrac{4}{5})$$

Svar: se ovan

② $y' + (2x-1)y + 2e^{-x-x^2} = 0$. Bestäm den allmänna lösning samt den som har extremvärde för $x=0$.

Lösning: multiplicera med integrerande faktor e^{x^2-x}. Vi får $\frac{d}{dx}(e^{x^2-x}\cdot y(x)) = -2e^{-2x}$

Alltså $y(x) = e^{-x^2+x}\cdot(e^{-2x}+C) = e^{-x^2-x} + Ce^{-x^2+x}$.

Om $y(x)$ har extremvärde i $x=0$ måste $y'(0)=0$.

Alltså $-1+C=0$ dvs $C=1$. (Vi noterar att $y(x) = 2-x^2+O(x^3)$ då $C=1$ och att $y(x)$ alltså har ett lokalt max i $x=0$ men detta behövs inte visas)

Svar: $y(x) = e^{-x^2}(e^{-x}+Ce^{x})$, $y(x) = e^{-x^2}(e^{-x}+e^{x})$.

③ $y'' + y = x^2+1$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

Lösning: Karakteristiska ekv $0 = r^2+1 = (r+i)(r-i)$ har rötterna $r_{1,2} = \pm i$ och homogenlösningen $y_h(x)$ till diff.ekv är $y_h(x) = A\cos x + B\sin x$. Ansätt en partikulärlösning $y_p(x) = ax^2+bx+c$. Derivering och insättning i diff ekv ger $2a + ax^2+bx+c = x^2+1$. Vi får

$a=1, b=0$ och $c=-1$. Lösning $y(x) = y_h(x)+y_p(x)$ ska uppfylla villkoren $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Detta ger

$A-1=0$, $B=1$. Detta ger svaret

Svar: $y(x) = \cos x + \sin x + x^2 - 1$.

④ $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2/2}\cdot\cos x}{x^4}$

Lösning: Gränsvärdet är av typen "$\frac{0}{0}$" och beräknas m.hjälp av Taylorutvecklingar.

$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+O(t^3)$ ger $e^{\frac{x^2}{2}} = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+O(x^6)$ $x\to 0$

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6)$, $x\to 0$

Alltså $1-e^{\frac{x^2}{2}}\cos x = -\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right)x^4+O(x^6) = \frac{1}{12}x^4+O(x^6)$

Detta ger

Svar: $\frac{1}{12}$.

⑤ Volymen $\pi\int_0^{2\pi}(|\sin x|)^2\,dx$

Lösning: sökta värdet är $\pi\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx =$

$=\{\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ "dubbla vinkeln för cos"$\} =$

$=\pi\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi^2$

Svar: π^2.

⑥ Bestäm den tangent till funktionskurvan $y=x^4$ som är vinkelrät mot $y=2x$

Lösning: Den sökta tangenten har lutningen $-\frac{1}{2}$ och kan alltså skrivas på formen $y=-\frac{1}{2}x+m$.

Låt a beteckna tangeringspunktens x-koordinat

Då gäller $-\frac{1}{2} = \frac{d}{dx}x^4\Big|_{x=a} = 4a^3$ dvs $a^3 = -\frac{1}{8}$.

Detta ger $a=-\frac{1}{2}$ och $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+m$

dvs $m=-\frac{3}{16}$.

Svar: $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{16}$.

⑦ $z=(1+i\sqrt{3})^{10}$. Sökt: $\mathrm{Re}\,z$ och $\mathrm{Im}\,z$

Lösning: Vi skriver $u=1+i\sqrt{3}$ på polär form.

$|u| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$, $\arg u = \frac{\pi}{3}$ + multipel av 2π.

Då gäller $|z| = 2^{10}$ och $\arg z = 10\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right.$ + multipel av $\left.2\pi\right) =$

$= \frac{4\pi}{3}$ + multipel av 2π

Alltså $z = 2^{10}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2^{10}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= (-2^9) + i(-2^9\sqrt{3})$

Svar: $\operatorname{Re} z = -2^9$, $\operatorname{Im} z = -2^9\sqrt{3}$.

8. $y'' - y'\cos x + y\sin x = 0$ har lösning $v(x) = e^{\sin x}$

Bestäm allmänna lösningen till diff.-ekv och den lösning som uppfyller $y(0) = y'(0) = 1$. (genom att ansätta $y(x) = v(x)\cdot z(x)$)

Lösning: Derivering av $y = v\cdot z$ och insättning i diff.-ekv ger $e^{\sin x}\cdot(z''(x) + 2z'(x)\cos x - z'\cos x) = 0$, dvs

$z'' + \cos x\cdot z' = 0$. Multiplicera med integrerande faktorn $e^{\sin x}$ ger $\frac{d}{dx}(e^{\sin x}\cdot z'(x)) = 0$. Detta ger $z'(x) = Ce^{-\sin x}$. Integrera. Vi får

$z(x) = \int_0^x e^{-\sin t}dt\cdot C + D$ Alltså gäller

$y(x) = Ce^{\sin x}\int_0^x e^{-\sin t}dt + De^{\sin x}$, $C, D \in \mathbb{R}$

Den lösning som uppfyller $y(0) = y'(0) = 1$ uppfyller $D = 1$, $C = 0$ dvs $y(x) = e^{\sin x}$

Svar: $y(x) = Ce^{\sin x}\int_0^x e^{-\sin t}dt + De^{\sin x}$, $y(x) = e^{\sin x}$.