Lösningsförslag till TMV170 / MMGD30, den 7/6 2017

① $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} x^{2x}\right)$, $x > 0$

$g(x) = \int_{x^2}^{2} (\ln t)^5 \, dt$, $x > 0$

Beräkna $f'(x)$, $g'(x)$ och $f'(1)$, $g'(e)$

Lösning: $f'(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x^{2x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} e^{2x \ln x}\right) =$

$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x^{2x}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot e^{2x \cdot \ln x} (2 \ln x + 2) =$

$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x^{2x}\right) \pi x^{2x} (\ln x + 1)$

Alltså gäller $f'(1) = -1 \cdot \pi = -\pi$.

Vidare $g'(x) = -(\ln(x^2))^5 \cdot 2x = -2^6 x (\ln x)^5$ vilket ger

$g'(e) = -2^6 e = -64e$

Svar: Se ovan

② Lös $y' = \frac{y}{x}$, $x > 0$, $y(1) = 2$

Lösning: $y' + \left(-\frac{1}{x}\right) y = 0$ är en 1:a ordn. linjär diff-ekv

Integrerande faktor: $e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$.

Alltså gäller $\frac{d}{dx}\left(y(x) \cdot \frac{1}{x}\right) = 0$, $x > 0$ vilket ger

$y(x) = Cx$, $x > 0$. Villkoret $y(1) = 2$ ger $C = 2$

Svar: $y(x) = 2x$

③ Lös $y'' + 2y' + y = xe^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Lösning: karakteristisk ekv. $r^2 + 2r + 1 = 0$ har dubbelroten

$r_{1,2} = -1$. Den allmänna homogenlösningen är då

$y_h(x) = (A + Bx) e^{-x}$.

För att bestämma en partikulärlösning $y_p(x)$ ansätter

$y_p(x) = (a + bx) e^x$. Derivering ger

$y_p'(x) = (a + b + bx) e^x$

$y_p''(x) = (a + 2b + bx) e^x$

Insättning i diff-ekv och förkortning med e^x ger

$a + 2b + bx + 2(a + b + bx) + a + bx = x$

dvs $b = \frac{1}{4}$, $a = -\frac{1}{4}$.

Den allmänna lösningen till diff-ekv ges då av

$$y(x) = (A+Bx)e^{-x} + \left(\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\right)e^{x} \ .$$

Konstanterna A och B bestäms av villkoren $y(0)=0, y'(0)=1$.

Detta ger

$$\begin{cases} 0 = y(0) = A - \frac{1}{4} \\ 1 = y'(0) = -A+B-\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{matrix} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{5}{4} \end{matrix}$$

Svar: $y(x) = \left(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}x\right)e^{-x} + \left(\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\right)e^{x}$

(4) Beräkna $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

Lösning: Vi noterar att $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$

Standardutvecklingarna

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \end{cases}$$

ger

$$x^2\sin^2 x = x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)^2 = x^4 + O(x^6)$$

$$x^2\cos^2 x - \sin^2 x = x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{6}+O(x^5)\right)^2 =$$

$$= x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x^4 + O(x^6) - \left(x^2 - 2\cdot\frac{1}{6}x^4 + O(x^6)\right) =$$

$$= \left(-1+\frac{1}{3}\right)x^4 + O(x^6) = -\frac{2}{3}x^4 + O(x^6) \ .$$

Av detta följer

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{-\frac{2}{3}x^4 + O(x^6)}{x^4+O(x^6)} = \frac{-\frac{2}{3}+O(x^2)}{1+O(x^2)} \to -\frac{2}{3}, \ x \to 0$$

Svar: $-\frac{2}{3}$

(5) Bestäm de $p \in \mathbb{R}$ för vilka $\int_0^\infty \frac{1-\frac{1}{2}\cos x}{(x^2+1)^p}\,dx$ konvergerar.

Lösning: Vi noterar att för $x \in [0,\infty)$ gäller

$$\frac{\frac{1}{2}}{(x^2+1)^p} \le \frac{1-\frac{1}{2}\cos x}{(x^2+1)^p} \le \frac{\frac{3}{2}}{(x^2+1)^p} \ .$$

Integralen $\int_0^1 \frac{1-\frac{1}{2}\cos x}{(x^2+1)^p}\,dx$ är väldefinierad så den sökta konvergensen gäller omm $\int_1^\infty \frac{1-\frac{1}{2}\cos x}{(x^2+1)^p}\,dx$ konvergerar:

$p > \frac{1}{2}$: För $x \in [1,\infty)$ gäller $0 < \frac{1-\frac{1}{2}\cos x}{(x^2+1)^p} < \frac{\frac{3}{2}}{x^{2p}}$

och $\int_1^\infty \frac{1}{x^{2p}}\,dx$ konvergerar då $2p > 1$.

Jämförelsesatsen ger att $\int_1^\infty \frac{1-\frac{1}{2}\cos x}{(x^2+1)^p}\,dx$ konv.

$p \leq 1$: För $x \in [1, \infty)$ gäller $\frac{\frac{1}{2}}{2^p \cdot x^{2p}} \leq \frac{1 - \frac{1}{2}\cos x}{(x^2+1)^p}$ och

$\int_1^\infty \frac{1}{x^{2p}}\,dx$ divergerar då $2p \leq 1$. Jämförelsesatsen

ger att $\int_1^\infty \frac{1 - \frac{1}{2}\cos x}{(x^2+1)^p}\,dx$ divergerar

Svar: $p > \frac{1}{2}$.

(6) Beräkna volymen av en rotationskropp

Lösning: Rotationskroppens volym ges av $\int_1^2 \pi f(x)^2\,dx =$

$$= \pi \int_1^2 \frac{1}{(1+x)^2(x+2)}\,dx$$

Vi partialbråksuppdelar integranden

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

Multiplikation med $x+2$ resp $(x+1)^2$ ger

$$C = 1, \quad B = 1.$$

Sätt $x = 0$. Detta ger $A = -1$.

Vi får nu

$$\int \frac{1}{(1+x)^2(x+2)}\,dx = -\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= -\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \ln|x+2| =$$

$$= \ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right| - \frac{1}{x+1}$$

och alltså gäller

$$\int_1^2 \frac{1}{(1+x)^2(x+2)}\,dx = \ln\frac{4}{3} - \frac{1}{3} - \left(\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \ln\frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \ln\frac{8}{9} + \frac{1}{6}$$

Svar: $\left(\frac{1}{6} + \ln\frac{8}{9}\right)\pi$.

(7) $z = a + i$, $a \in \mathbb{R}$. Bestäm de $a \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\frac{4\,\mathrm{Re}\,z}{|z|^2} = 1$$

Lösning: $\mathrm{Re}\,z = a$, $|z| = \sqrt{a^2+1}$.

Alltså gäller $\frac{4\,\mathrm{Re}\,z}{|z^2|} = \frac{4a}{a^2+1}$

Sökta a bestäms av $a^2 - 4a + 1 = 0$ dvs

$$a = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Svar: $2 \pm \sqrt{3}$

(8) Lös $y' = \sqrt{1+y^2}$, $y(0) = 1$.

Lösning: Separabel diff-ekv med

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = \int dx$$

dvs $\ln|y+\sqrt{1+y^2}| = x+C$, $C\in\mathbb{R}$

dvs $y+\sqrt{1+y^2} = e^{x+C} = \tilde{C}e^x$, $\tilde{C}>0$

Villkoret $y(0)=1$ ger $1+\sqrt{2} = \tilde{C}$.

Från $\sqrt{1+y^2} = (1+\sqrt{2})e^x - y$ fås

$$1+y^2 = (1+\sqrt{2})^2e^{2x} + y^2 - 2(1+\sqrt{2})e^x y$$

dvs

$$y(x) = \frac{(1+\sqrt{2})^2e^{2x}-1}{2(1+\sqrt{2})e^x} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}e^x + \frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{-x}.$$

<u>Svar</u>: $y(x) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}e^x + \frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{-x}$.