Lösningar till tentan TMV170/MMGD30 den 22/8 2017

(1.) $f(x) = x^{\cos^2 x}$, $x > 0$

$g(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$, $x \neq 0$

Beräkna $f'(x)$, $g'(x)$ och $f'(\pi)$, $g'(2)$.

Lösning:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{\cos^2 x \ln x} = x^{\cos^2 x} \cdot \frac{d}{dx}(\cos^2 x \cdot \ln x) =$$

$$= x^{\cos^2 x} \cdot \left(2\cos x \cdot (-\sin x) \cdot \ln x + \cos^2 x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

Alltså gäller $f'(\pi) = \pi \cdot \left(0 + 1 \cdot \frac{1}{\pi}\right) = \pi$

$$g'(x) = \frac{e^x}{x} \cdot \frac{d}{dx} x - \frac{e^{x^2}}{x^2} \cdot \frac{d}{dx} x^2 = \frac{e^x}{x} - \frac{2e^{x^2}}{x}$$

Alltså gäller $g'(2) = \frac{e^2}{2} - \frac{2e^4}{2} = \frac{e^2}{2}(1 - 2e^2)$

Svar: se ovan

(2) Lös $y'\sqrt{1+x^2} = xy^3$, $y(0) = 1$

Lösning: Detta är en separabel diff-ekv som för $y \neq 0$ kan skrivas

$\frac{1}{y^3} y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, dvs $g(y)y' = f(x)$ där

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ och $g(y) = \frac{1}{y^3}$. Vi har nu de primitiva funktionerna

$$F(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad G(y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2}$$

Vi får $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y(x)}\right)^2 = \sqrt{1+x^2} + C$

Villkoret $y(0) = 1$ ger $C = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$. Vi får

$$y(x) = (\pm)\frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}, \quad x \in \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

Svar: $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}$, $x \in \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

(3) Lös $y'' + y = \sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Lösning: Karakteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ ger rötterna $r_{1,2} = \pm i$. Den allmänna homogenlösningen är

$y_h(x) = A\cos x + B\sin x$.

För att bestämma en partikulärlösning $y_p(x)$ ansätt

$y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$

Derivering och insättning i diff-ekv ger

$$-4a\cos(2x) - 4b\sin(2x) + a\cos(2x) + b\sin(2x) = \sin(2x).$$

Vi får $a = 0$, $b = -\frac{1}{3}$. Den allmänna lösningen till diff-ekv ges då av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos x + B\sin x - \frac{1}{3}\sin(2x)$$

Konstanterna A och B bestäms av villkoren $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Detta ger

$$\begin{cases} 0 = y(0) = A \\ 1 = y'(0) = B - \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Svar: $y(x) = \frac{5}{3}\sin x - \frac{1}{3}\sin(2x)$

(4) Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$

Lösning: Vi noterar att definitionsmängden för $\frac{x^x-1}{x\ln x}$ är $\{x \in \mathbb{R} : x > 0, x \neq 1\}$ varför gränsvärdet är ett högergränsvärde (om det existerar). Vidare gäller $x\ln x \to 0, x \to 0+$ (standardgränsvärde). Omskrivningen $\frac{x^x - 1}{x\ln x} = \frac{e^{x\ln x} - 1}{x \ln x}$ och Taylorutvecklingen $e^t = 1 + t + O(t^2)$, $t \to 0$ ger

$$\frac{x^x-1}{x\ln x} = \frac{1 + x\ln x + O((x\ln x)^2) - 1}{x\ln x} = 1 + O(x\ln x) \to 1, x \to 0+$$

Svar: 1

(5) Bestäm för vilka $p \in \mathbb{R}$ som $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x^3+1)^p}\,dx$ konvergerar

Lösning: Vi noterar att för $x \in [0,1]$ gäller

$$\frac{1}{2^p}\sqrt{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{(x^3+1)^p} \leq 1$$

så $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x^3+1)^p}\,dx$ konvergerar om och endast om $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x^3+1)^p}\,dx$ konvergerar. För $x \in [1,\infty)$ kan vi göra uppskattningen

$$\frac{1}{2^p} x^{\frac{1}{2}-3p} \leq \frac{\sqrt{x}}{(x^3+1)^p} \leq x^{\frac{1}{2}-3p}.$$

Då

$$\int_1^\infty x^q\,dx \text{ konvergerar} \iff q < -1$$

gäller att $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x^3+1)^p}\,dx$ konvergerar om och endast om $\frac{1}{2} - 3p < -1$, dvs $p > \frac{1}{2}$.

Svar: Generaliserade integralen konvergerar $\iff p > \frac{1}{2}$.

(6) Bestäm volymen av rotationskroppen i uppgift 5a

Lösning: För $f(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{x+1}} > 0$, $x \in [0,1]$ gäller att rotationskroppens volym ges av

$$\pi \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2(x+1)}\,dx$$

För att beräkna integralen partialbråksuppdelar vi integranden. Vi har

$$\frac{1}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Liten kalkyl ger $B=-1$, $C=1$, $A=-1$

Vidare gäller

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx = \ln(x+2)\Big|_{x=0}^{1} = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = -\frac{1}{x+2}\Big|_{x=0}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(x+1)\Big|_{x=0}^{1} = \ln 2$$

Detta ger

$$\pi \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2(x+1)}\,dx = \pi\left(-1\cdot\ln\frac{3}{2} - 1\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\ln 2\right) =$$

$$= \pi\left(\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{6}\right)$$

Svar: $\pi\left(\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{6}\right)$

(7) $z = a+i$, $a \in \mathbb{R}$. Bestäm alla $a \in \mathbb{R}$ så att $\frac{2\,\mathrm{Im}\,z}{|z|^2} = \mathrm{Re}\,z$

Lösning: Det gäller att $\mathrm{Re}\,z = a$, $\mathrm{Im}\,z = 1$ och $|z|^2 = a^2+1$. Då gäller $\frac{2\,\mathrm{Im}(z)}{|z|^2} = \mathrm{Re}\,z \iff 2 = a(a^2+1)$

$\iff a^3 + a - 2 = 0$. Vi ser att $a=1$ är en rot.

Polynomdivision ger $a^3+a-2 = (a-1)(a^2+a+2) =$

$= (a-1)\left(\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + 2 - \frac{1}{4}\right) = (a-1)\left(\underbrace{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}_{>0}\right)$.

Alltså är $a=1$ den enda lösningen

Svar: 1

(8) Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t}\,dt - x\right)$

Lösning: Vi noterar att Taylorutveckling ger

$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + O(|z|^5)$ då $z \to 0$

Vidare gäller $\frac{1}{x^3}\left(\int_0^1 \frac{1}{t}\left(xt - \frac{1}{6}(xt)^3\right)dt - x\right) =$

$= \frac{1}{x^3}\left(x - \frac{x^3}{6}\int_0^1 t^3\,dt - x\right) = \frac{1}{6}\int_0^1 t^3\,dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^4}{4}\Big|_{t=0}^{1} = \frac{1}{24}$

slutligen gäller $|O(|xt|^5)| \leq M\cdot|x|^5$ för alla $t\in[0,1]$

och $|x| \leq \varepsilon$ litet för något $M = M(\varepsilon)$. Detta ger

$\left|\frac{1}{x^3}\int_0^1 O(|xt|^5)\,dt\right| \leq M\cdot|x|^2 \to 0$, då $x\to 0$.

Svar: $\frac{1}{24}$