Lösningsförslag till tenta TMV170/MMGD30 den 15/3 2018

1. $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $g(x) = \int_1^{\ln x} e^{t^2} dt$

Beräkna $f'(x), g'(x)$ samt $f'(0), g'(e)$.

Lösning:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$f'(0) = 1$

$$g'(x) = e^{(\ln x)^2} \cdot \frac{d}{dx}\ln x = e^{\ln x \cdot \ln x} \cdot \frac{1}{x} = (e^{\ln x})^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= x^{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

$g'(e) = 1$

Svar: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(0) = 1$, $g'(x) = x^{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$, $g'(e) = 1$

2. $xy'\cos y + \sin y = 0$, $0 < x$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$

Lös differentialekvationen

Lösning: För $0 < x$ och $0 < y < \frac{\pi}{2}$ gäller

$\frac{\cos y}{\sin y} \cdot y' = -\frac{1}{x}$ separabel diff-ekv

Sätt $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(y) = \frac{\cos y}{\sin y}$. Primitiva funktioner till $f(x)$ resp. $g(y)$ ges av

$F(x) = -\ln|x| = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$

$G(y) = \ln|\sin y| = \ln(\sin y)$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$.

Vi får

$\ln(\sin y(x)) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln C$, $C > 0$

och alltså

$\sin(y(x)) = \frac{C}{x}$, $x \geq C > 0$

Alltså $y(x) = \arcsin\left(\frac{C}{x}\right)$, $x \in [C, \infty)$

Svar: $y(x) = \arcsin\left(\frac{C}{x}\right)$, $x \in [C, \infty)$ där $C > 0$.

③ Lös $y'' + 2y' + y = e^x(1+x^2)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

Lösning: Karakteristiska ekvationen

$0 = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$ ger $r_{1,2} = -1$. Detta

ger den allmänna homogena lösningen

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}.$$

Ansätt partikulärlösningen $y_p(x) = e^x \cdot z(x)$.

Derivering och insättning i diff-ekv ger

$$z'' + 2z' + z + 2(z' + z) + z = 1 + x^2$$

dvs $z'' + 4z' + 4z = 1 + x^2$. Ansätt $z(x) = ax^2 + bx + c$

Derivering och insättning i diff-ekv ger

$$2a + 4\cdot(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = 1 + x^2$$

dvs $(4a-1)x^2 + (8a+4b)x + (2a+4b+4c-1) = 0$ alla x

Alltså

$$\begin{cases} 4a - 1 = 0 \\ 8a + 4b = 0 \\ 2a + 4b + 4c - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{vilket ger} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{5}{8} \end{cases}$$

Detta ger

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + e^x\left(\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{8}\right)$$

A, B bestäms av villkoren $y(0)=0$, $y'(0)=1$ dvs

$$\begin{cases} 0 = y(0) = A + \frac{5}{8} \\ 1 = y'(0) = -A + B + \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{vilket ger} \quad \begin{cases} A = -\frac{5}{8} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Svar: $y(x) = e^{-x}\left(\tfrac{1}{4}x - \tfrac{5}{8}\right) + e^x\left(\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{8}\right)$

④ Beräkna $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Lösning: Vi gör omskrivningen

$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}$ där $0 < |x|$, $|x|$ nära 0.

Standardutvecklingarna

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), \quad \ln(1+x) = x + O(x^2)$$

ger

$$\frac{1}{x^2}\cdot \ln(\cos x) = \frac{1}{x^2}\ln\left(1+\left(-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right) = -\frac{1}{2}+O(x^2)$$

Alltså $\quad (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}+O(x^2)} \to e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \; x\to 0$

<u>Svar:</u> $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

(5) Avgör för vilka $p\in\mathbb{R}$ som $\int_1^\infty \frac{1}{(x^p+1)^3}\,dx$ konvergerar och för vilka $p\in\mathbb{R}$ som integralen divergerar.

Lösning: Vi vet att för $q\in\mathbb{R}$ gäller

$\int_1^\infty x^q\,dx$ konvergent $\iff q<-1$.

För $p\le 0$ gäller

$$\frac{1}{(x^p+1)^3} \geq \frac{1}{(1+1)^3} = \frac{1}{8} \quad \text{för } x\geq 1$$

Alltså gäller $\int_1^\infty \frac{1}{(x^p+1)^3}\,dx$ divergent för $p\le 0$.

Antag $p>0$: Då

$$\frac{1}{8x^{3p}} \le \frac{1}{(x^p+1)^3} \le \frac{1}{x^{3p}} \quad \text{för } x\geq 1$$

ger jämförelsesatsen för generaliserade integraler

att $\int_1^\infty \frac{1}{(x^p+1)^3}\,dx$ är konvergent $\iff -3p<-1$

$\iff p>\frac{1}{3}$.

Svar: konvergerar för $p>\frac{1}{3}$ och divergerar för $p\le\frac{1}{3}$.

(6) Beräkna $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2(x+1)}\,dx$.

Lösning: Partialbråksuppdelningsansats

$$\frac{1}{(1+x^2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

ger $\quad 1 = A\cdot(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x+1) + (Dx+E)(x+1)$

dvs $\quad (A+B)x^4 + (B+C)x^3 + (2A+C+B+D)x^2 + (B+C+D+E)x +$

$+ (A+C+E-1) = 0 \qquad$ alla $x\in\mathbb{R}$

dvs

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ 2A+C+B+D=0 \\ B+C+D+E=0 \\ A+C+E=1 \end{cases} \quad \text{Vi får} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \\ C=\frac{1}{4} \\ D=-\frac{1}{2} \\ E=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Detta ger

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2(x+1)}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{-x+1}{1+x^2}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-x+1}{(1+x^2)^2}\,dx \quad ;$$

Här gäller

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{-x+1}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1 + \Big[\arctan x\Big]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) + (\arctan 1 - \arctan 0) =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4}$$

och

$$\int_0^1 \frac{-x+1}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{(1+x^2)}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right) + \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{4} + \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Slutligen

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= \{\text{se ovan}\} = \frac{\pi}{4} - \left\{\Big[x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1+x^2}\Big]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1+x^2}\,dx\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left\{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}.$$

Detta ger den sökta integralens värde

$$\frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln 2 + \ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4}\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{8} =$$

$$= \frac{1}{8}\ln 2 + \frac{\pi}{8}$$

<u>Svar:</u> $\frac{1}{8}\ln 2 + \frac{\pi}{8}$.

7. $z = (\sqrt{3} - i)^{50}\cdot(1 - i\sqrt{3})^{30}$. Bestäm $\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$

Lösning: Vi noterar att

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

$$1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

Alltså gäller

$$(\sqrt{3}-i)^{50}\cdot(1-i\sqrt{3})^{30} = 2^{80}\cdot e^{(-50\cdot\frac{\pi}{6}-30\cdot\frac{\pi}{3})i} =$$

$$= 2^{80}\cdot e^{i\frac{5}{3}\pi} = 2^{80}\cdot\left(\cos(\tfrac{5\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{5\pi}{3})\right)$$

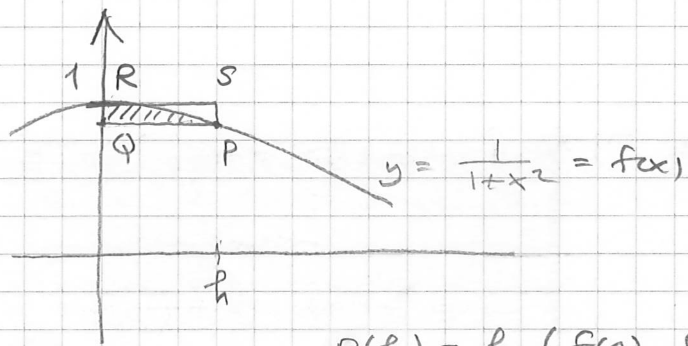
Här gäller $\cos(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{5\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Då $\operatorname{Re} z = 2^{80}\cdot\frac{1}{2}$ och $\operatorname{Im} z = 2^{80}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ fås

$$\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Svar: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(8) Beräkna $\lim_{h\to 0+}\frac{A(h)}{B(h)}$ där $B(h)$ är arean av axelparallella rektangeln PQRS och $A(h)$ är arean av det streckade området



P : $(h, f(h))$
R : $(0, f(0))$
Q : $(0, f(h))$

S : $(h, f(0))$

$$B(h) = h\cdot(f(0)-f(h)) = \frac{h^3}{1+h^2}, \quad h>0$$

$$A(h) = \int_0^h (f(x)-f(h))\,dx = \int_0^h\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+h^2}\right)dx =$$

$$= \left[\arctan x - \frac{1}{1+h^2}\cdot x\right]_0^h = \arctan h - \frac{h}{1+h^2}.$$

Detta ger, för $h>0$,

$$\frac{A(h)}{B(h)} = \frac{(1+h^2)\arctan h - h}{h^3}$$

För att beräkna gränsvärdet Taylorutvecklar vi $\arctan h$ kring 0. Vi noterar att $\arctan h$ är en udda funktion (i h) och alltså

$$\arctan h = ah + bh^3 + O(h^5)$$

där $a = f'(0)$, $b = \frac{f'''(0)}{6}$. Lite räknande ger

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^4}\left[-2(1+x^2)^2-(-2x)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x\right], \quad f'''(0) = -2$$

Detta ger

$$\frac{A(h)}{B(h)} = \frac{1}{h^3}\left((1+h^2)\left(h - \frac{1}{3}h^3 + O(h^5)\right) - h\right) =$$

$$= \frac{1}{h^3}\left(h + \frac{2}{3}h^3 + O(h^5) - h\right) =$$

$$= \frac{2}{3} + O(h^2) \to \frac{2}{3}, \quad h \to 0+.$$

<u>Svar</u>: $\frac{2}{3}$