Lösningsskisser till TMV170/MMGD30 den 5/6 2018

① $f(x) = \dfrac{2+\arctan x}{2-\arctan x}$, $g(x) = \int_{\ln x}^{\ln x^2} \dfrac{\sin t}{t}\, dt$

Beräkna $f'(x), g'(x)$ samt $f'(1), g'(e)$.

Lösning: $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x^2}\cdot(2-\arctan x) - (2+\arctan x)(-\frac{1}{1+x^2})}{(2-\arctan x)^2} =$

$= \dfrac{4}{(1+x^2)\cdot(2-\arctan x)^2}$, $f'(1) = \dfrac{4}{2\cdot(2-\frac{\pi}{4})^2} = \dfrac{32}{(8-\pi)^2}$

$g'(x) = \dfrac{\sin(\ln x^2)}{\ln x^2}\cdot\dfrac{2}{x} - \dfrac{\sin(\ln x)}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}$

$g'(e) = \dfrac{\sin(2)}{2}\cdot\dfrac{2}{e} - \dfrac{\sin 1}{1}\cdot\dfrac{1}{e} = (\sin 2 - \sin 1)\cdot\dfrac{1}{e}$

Svar: Se ovan

② Lös $(x^2+4)y' + 4xy = x$

Lösning: $y' + \dfrac{4x}{x^2+4}\, y = \dfrac{x}{x^2+4}$ har den integrerande faktorn $\exp\left(\int \frac{4x}{x^2+4}\, dx\right) = \exp\left(2\ln(x^2+4)\right) = (x^2+4)^2$.

Multiplikation med $(x^2+4)^2$ ger

$$\frac{d}{dx}\left((x^2+4)^2\cdot y(x)\right) = x(x^2+4)$$

dvs $(x^2+4)^2\cdot y(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + C$

Allmän lösn. $y(x) = \dfrac{\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + C}{(x^2+4)^2}$

Svar: $y(x) = \dfrac{\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + C}{(x^2+4)^2}$, $C \in \mathbb{R}$

③ Lös

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = 5e^{-7x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Lösning: Den karakteristiska ekvationen $0 = r^2 + 4r + 13 =$
$= (r+2)^2 + 3^2 = (r+2+3i)(r+2-3i)$ ger homogenlösningen
$y_h(x) = Ae^{-2x}\cos(3x) + Be^{-2x}\sin(3x)$. För att bestämma en partikulärlösning $y_p(x)$ ansätts $y_p(x) = Ce^{-7x}$.

Derivering och insättning ger

$(49 - 28 + 13)C = 5$ dvs $C = \frac{5}{34}$

Detta ger $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-2x}\cdot\cos(3x) + Be^{-2x}\cdot\sin(3x) + \frac{5}{34}e^{-7x}$

Villkoren $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ bestämmer A och B.

Vi får

$$\begin{cases} 0 = A + \frac{5}{34} \\ 0 = -2A + 3B - \frac{35}{34} \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} A = -\frac{5}{34} \\ B = \frac{25}{102} \end{cases}$$

Svar: $y(x) = -\frac{5}{34} e^{-2x} \cos(3x) + \frac{25}{102} e^{-2x} \sin(3x) + \frac{5}{34} e^{-7x}$

(4) Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 - \tan^2 x}$

Lösning: Vi har $\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 - \tan^2 x} = \frac{\cos^2 x \,(x^2 - \sin^2 x)}{x^2 \cdot \cos^2 x - \sin^2 x}$

Standardutvecklingarna

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5) \\ \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6) \end{cases}$$

ger

$$x^2 \cdot \cos^2 x - \sin^2 x = x^2 \left(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\right)^2 - \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^5)\right)^2 =$$

$$= x^2\left(1 - x^2 + O(x^4)\right) - \left(x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + O(x^6)\right) =$$

$$= \left(-1 + \tfrac{1}{3}\right)x^4 + O(x^6) = -\tfrac{2}{3}x^4 + O(x^6).$$

och

$$\cos^2 x \cdot (x^2 - \sin^2 x) = \left(1 + O(x^2)\right)^2 \left(x^2 - \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^5)\right)^2\right) =$$

$$= \left(1 + O(x^2)\right)\left(x^2 - \left(x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + O(x^6)\right)\right) =$$

$$= \left(1 + O(x^2)\right)\left(\tfrac{1}{3}x^4 + O(x^6)\right) = \tfrac{1}{3}x^4 + O(x^6)$$

Alltså $\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 - \tan^2 x} = \frac{\frac{1}{3}x^4 + O(x^6)}{-\frac{2}{3}x^4 + O(x^6)} = \frac{1 + O(x^2)}{-2 + O(x^2)} \to -\frac{1}{2}, \; x \to 0$

Svar: $-\frac{1}{2}$.

(5) Avgör konvergens/divergens för $p \in \mathbb{R}$ för

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^p \left(\frac{1}{x}+1\right)^p} \, dx$$

Lösning: Vi har $(x+1)^p\left(\frac{1}{x}+1\right)^p = \left(2 + x + \frac{1}{x}\right)^p, \; x > 0$

Vidare gäller

$\int_1^\infty \frac{1}{x^q} \, dx$ konvergerar $\iff$ $q > 1$

$\int_0^1 \frac{1}{x^q} \, dx$ konvergerar $\iff$ $q < 1$.

För $x \in [1, \infty)$ gäller $x < 2 + x + \frac{1}{x} < x + 3$ varför

$\int_1^\infty \frac{1}{\left(2 + x + \frac{1}{x}\right)^p} \, dx$ konvergerar $\iff$ $p > 1$

där vi använt jämförelsekriteriet.

För $x \in (0,1]$ gäller $2 < 2+x+\frac{1}{x}$ $(< \frac{1}{x}+3)$ varför för $p>1$

$\int_0^1 \frac{1}{(2+x+\frac{1}{x})^p}dx$ konvergerar $\Leftrightarrow$ alla $p>1$.

Alltså $\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^p(\frac{1}{x}+1)^p}dx$ konvergerar om $p>1$ och divergerar om $p \leq 1$

Svar: konvergens $\Leftrightarrow$ $p>1$.

(6) Beräkna $\int_0^1 \frac{3+x+2x^2+x^4}{(1+x^2)^2(2+x)}dx$

Lösning: Partialbråksuppdelning av integranden ger

$$\frac{3+x+2x^2+x^4}{(1+x^2)^2\cdot(2+x)} = \frac{A+Bx}{1+x^2} + \frac{C+Dx}{(1+x^2)^2} + \frac{E}{x+2} \quad \ldots (*)$$

Vi ser direkt att $E = \frac{3-2+2(-2)^2+(-2)^4}{(1+(-2)^2)^2} = 1$

Sätt HL i (*) på gemensamt bråkstreck. Vi får i följaren

$$3+x+2x^2+x^4 = (A+Bx)(1+x^2)(x+2) + (C+Dx)(x+2) + (1+x^2)^2$$

Detta ger

x^4: $1 = B+1$ $\Rightarrow B=0$

x^3: $0 = A+2B$ $\Rightarrow A=0$

x^2: $2 = 2A+B+D+2$ $\Rightarrow D=0$

x^1: $1 = A+2B+C+2D$ $\Rightarrow C=1$

x^0: $3 = 2A+2C+1$ ok

Alltså $\int_0^1 \frac{3+x+2x^2+x^4}{(1+x^2)^2(2+x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{x+2}dx + \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$

Här gäller

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx = \Big[\ln(x+2)\Big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x}{2}\cdot\underbrace{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}_{=\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2}}dx =$$

$$= \Big[\arctan x\Big]_0^1 + \Big[\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big]_0^1 -$$

$$- \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan 1 - \arctan 0 + \frac{1}{4} -$$

$$- \frac{1}{2}\Big[\arctan x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

Svar: $\ln\frac{3}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

(7) $z = 1+\cos\theta + i\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Beräkna $|z|$ och $\arg z$

Lösning: $\operatorname{Re} z = 1+\cos\theta$, $\operatorname{Im} z = \sin\theta$ ger

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta} =$$

$$= \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2+2\left(2\cos^2\tfrac{\theta}{2}-1\right)} = 2\sqrt{\cos^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)} = 2\left|\cos\tfrac{\theta}{2}\right|$$

(8) se marstentan 2018