Lösningsförslag till TMV170/MMGD30 den 29/8 2018

1. $f(x) = \tan(2\arctan(3x))$

$$g(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^2}\,dt$$

Beräkna $f'(x)$, $g'(x)$ och $f'(0)$, $g'(\frac{\pi}{2})$

Lösning:

$$f'(x) = \left(1+(\tan(2\arctan(3x)))^2\right)\cdot 2\,\frac{1}{1+(3x)^2}\cdot 3 =$$

$$= \frac{6}{1+9x^2}\left(1+(\tan(2\arctan(3x)))^2\right)$$

Vi har $\tan(2t) = \dfrac{\sin(2t)}{\cos(2t)} = \dfrac{2\cos t\cdot\sin t}{\cos^2 t - \sin^2 t} =$

$= \dfrac{2\tan t}{1-(\tan t)^2}$ då $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \neq 0$

Med $t = \arctan(3x)$ fås

$$\tan(2\arctan(3x)) = \frac{2\cdot 3x}{1-(3x)^2} = \frac{6x}{1-9x^2}, \quad x \neq \pm\frac{1}{3}.$$

$$g'(x) = e^{\sin^2 x}\cdot\cos x - e^{\cos^2 x}\cdot(-\sin x) =$$

$$= e^{\sin^2 x}\cdot\cos x + e^{\cos^2 x}\cdot\sin x$$

Vi fås $f'(0) = 6$, $g'(\frac{\pi}{2}) = 1$

Svar: $f'(0) = 6$, $g'(\frac{\pi}{2}) = 1$.

2. $(x^2+x)y' + y = y^2 \quad , x > 0$

Lösning: Detta är en separabel diff-ekv

För $y \neq 0, 1$ gäller

$$\frac{1}{y(y-1)}\cdot y' = \frac{1}{x(x+1)}$$

Vi har

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \ln x - \ln(x+1) = \ln\frac{x}{x+1}, \quad x > 0$$

$$\int \frac{1}{y(y-1)}\,dy = \int\left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right)dy = -\ln|y| + \ln|y-1| =$$

$$= \ln\left|\frac{y-1}{y}\right|$$

Detta ger $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln\frac{x}{x+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$

Med $C = \ln C'$, $C' > 0$ fås

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = C'\,\frac{x}{x+1}$$

dvs

$$\frac{y-1}{y} = C''\,\frac{x}{x+1}, \quad C'' \neq 0$$

Detta ger

$$\frac{1}{y} = 1 - c'' \frac{x}{x+1} = \frac{(1-c'')x+1}{x+1}$$

dvs

$$y(x) = \frac{x+1}{Dx+1}, \quad D \neq 1, \quad Dx+1 \neq 0$$

Dessutom är $y(x) = 0$, $y(x) = 1$ två lösningar

Svar: $y(x) = \dfrac{x+1}{Dx+1}$, $x \neq -\dfrac{1}{D}$ om $D \neq 0$

och $y(x) = 0$.

(3) $\begin{cases} y'' - 7y' + 6y = \sin x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

Lösning: Kar. polynom $r^2 - 7r + 6 = (r - \frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} + 6 =$

$= (r - \frac{7}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 = (r-6)(r-1)$.

Alltså $y_h(x) = Ae^{6x} + Be^x$

Ansätt $y_p(x) = a\cos x + b\sin x$. Derivering och insättning i diff-ek. ger

$$-a\cos x - b\sin x - 7(-a\sin x + b\cos x) + 6(a\cos x + b\sin x) = \sin x$$

dvs $(5a - 7b)\cos x + (5b + 7a - 1)\sin x = 0$

Alltså

$$\begin{cases} 5a - 7b = 0 \\ 7a + 5b = 1 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} a = \frac{7}{74} \\ b = \frac{5}{74} \end{cases}$$

Vi får $y(x) = Ae^{6x} + Be^x + \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x$.

A och B bestäms av villkoren $y(0) = y'(0) = 0$.

$$\begin{cases} A + B + \frac{7}{74} = 0 \\ 6A + B + \frac{5}{74} = 0 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{5 \cdot 37} = \frac{1}{185} \\ B = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

Svar: $y(x) = \frac{1}{185}e^{6x} - \frac{1}{10}e^x + \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(a + be^x)}{\sqrt{c + dx^2}}$ där $b, d > 0$

Lösning: För $x \gg 1$ gäller

$$\frac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{c+dx^2}} = \frac{\ln(a+be^x) - \ln(be^x) + \ln(be^x)}{\sqrt{d}\,x\sqrt{1 + \frac{c}{dx^2}}}$$

där $\ln(a+be^x) - \ln(be^x) = \ln\left(\frac{a+be^x}{be^x}\right) \to \ln 1 = 0, \; x \to \infty$

och $\sqrt{1 + \frac{c}{dx^2}} \to 1, \; x \to \infty$

och $\frac{\ln(b e^x)}{x} = \frac{\ln b + \ln e^x}{x} = \frac{\ln b + x}{x} \longrightarrow 1, x \to \infty$

Alltså, det sökta gränsvärdet är $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

Svar: $\frac{1}{\sqrt{d}}$

(5) För vilka $p \in \mathbb{R}$ konvergerar $\int_0^1 \frac{x^p}{\sin(x^2)}\,dx$?

Lösning: Vi vet att

$\int_0^1 x^r\,dx$ konvergerar om och endast om $r > -1$.

För $x \in (0,1)$ gäller

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x < x \qquad (\text{känt})$$

Alltså $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin(x^2)}{x^2} < 1$ för alla $x \in (0,1)$.

Detta ger med $\frac{x^p}{\sin(x^2)} = \frac{x^2}{\sin(x^2)} \cdot x^{p-2}$ att

$$\frac{2}{\pi} x^{p-2} < \frac{x^p}{\sin(x^2)} < x^{p-2} \qquad \text{för} \quad x \in (0,1)$$

och jämförelsekriteriet ger att $\int_0^1 \frac{x^p}{\sin(x^2)}\,dx$ konvergerar om och endast om $p-2 > -1$ dvs $p > 1$.

Svar: konvergerar för $p > 1$ och divergerar för $p \leq 1$.

(6) Beräkna $\int_0^2 \frac{x^4+1}{(4+x^2)^2}\,dx$

Lösning:

$$\frac{x^4+1}{(4+x^2)^2} = \frac{x^4+1}{x^4+8x^2+16} = 1 - \frac{8x^2+15}{(x^2+4)^2}$$

Partialbråksuppdelning av andra termen

$$\frac{8x^2+15}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

där

$$8x^2+15 = (Ax+B)(x^2+4) + Cx + D$$

ger

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 8 \\ 4A + C = 0 \\ 4B + D = 15 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 8 \\ C = 0 \\ D = -17 \end{array}$$

Vidare gäller

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}\,dx = \left\{ t = \frac{x}{2},\ dt = \frac{1}{2}dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\arctan t\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

$$\int_0^2 \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{16}\int_0^2 \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^2}\,dx = \left\{ t=\frac{x}{2},\ dt=\frac{1}{2}dx \right\} =$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt \quad ;$$
$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt =$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^1 \frac{t}{2}\cdot\frac{(-2t)}{(1+t^2)^2}\,dt = \{PI\} =$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \left[\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}.$$

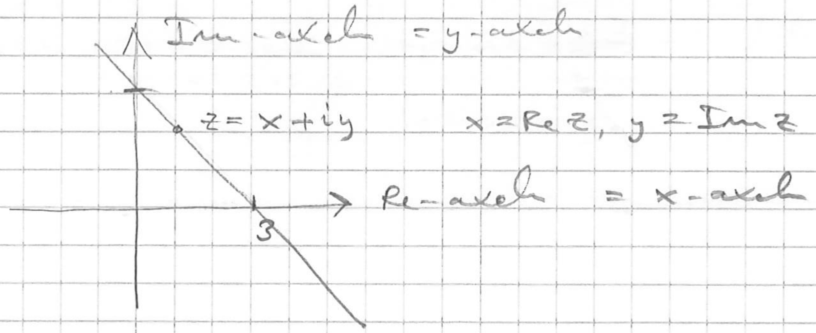
Alltså

$$\int_0^2 \frac{x^4+1}{(4+x^2)^2}\,dx = 2-\left(8\cdot\frac{\pi}{8} - \frac{17}{8}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)\right) =$$
$$= \frac{81}{32} - \frac{47}{64}\pi \qquad (\approx 0{,}22)$$

Svar: $\frac{81}{32} - \frac{47}{64}\pi$

(7) Beräkna $\max \left| \frac{1}{z+2+i} \right|$ för z på räta linjen genom 3 och $3i$

Lösning:



$y = -x+3$ ger $|z+2+i| = |x+iy+2+i| =$

$$= |x+i(3-x)+2+i| = |(x+2)+i(4-x)| =$$
$$= \sqrt{(x+2)^2+(4-x)^2} = \sqrt{2x^2-4x+20}$$

Vi noterar att $\min_{x\in\mathbb{R}} (2x^2-4x+20) = \min_{x\in\mathbb{R}} (2(x-1)^2+18) = 18$

Av detta följer att

$$\max_{\substack{z \text{ på} \\ \text{linjen}}} \left| \frac{1}{z+2+i} \right| = \frac{1}{\sqrt{\min_{x\in\mathbb{R}}(2x^2-4x+20)}} = \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Svar: $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

(8) Se förra tentan.