MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys TMV170/MMGD30, 2017-03-16, TID(14.00-18.00)

Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare
Telefonvakt: Peter Kumlin, ankn 3532

Besökstider: ca 15.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Beräkna derivatan av funktionerna

$$f(x) = x^{2x} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}x^2)$$

och

$$g(x) = \int_1^{x^2} (\ln t)^2 \, dt$$

samt beräkna $f'(1)$ och $g'(e)$. Förenkla så långt som möjligt.

(3+3p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(6p)

3. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = e^x(1+x^2) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

4. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{x^2/2} \cos x}{x^4}.$$

(6p)

V.G.V.

5. Avgör för vilka $p \in \mathbb{R}$ som integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^3+1)^p}$$

konvergerar och för vilka p som integralen divergerar.

(5p)

6. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då området, som begränsas av grafen till

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x+2}}, \quad x \in [0,1],$$

x–axeln samt linjerna $x = 0$ och $x = 1$, roterar kring x–axeln.

(8p)

7. Sätt

$$z = (\sqrt{3} - i)^{50} \cdot (1 - i\sqrt{3})^{30}.$$

Bestäm kvoten

$$\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}.$$

(5p)

8. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} xy' = y(1 + \ln y - \ln x), \; x > 0 \\ y(1) = e \end{cases}$$

genom att införa en ny funktion z via sambandet $y(x) = xz(x)$.

(7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

Lösningsförslag till tentamen TMV170/MMGD30 den 16/3 2017

① Beräkna $f'(x), g'(x)$ samt $f'(1), g'(e)$.

där $f(x) = x^{2x}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$, $g(x) = \int_1^{x^2} (\ln t)^2\,dt$

Lösning

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{2x\ln x}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right) = x^{2x}\cdot(2\ln x + 2)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) +$$

$$+ x^{2x}\cdot\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right)\cdot\pi x = x^{2x}\left(2(\ln x+1)\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) - \pi x\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right)$$

och alltså $f'(1) = -\pi$.

$$g'(x) = (\ln(x^2))^2\cdot\frac{d}{dx}(x^2) = 4(\ln x)^2\cdot 2x = 8x(\ln x)^2$$

och alltså $g'(e) = 8e$

Svar: $f'(x)$, $g'(x)$ se ovan $f'(1) = -\pi$, $g'(e) = 8e$

② Lös

$$\begin{cases} y' = \frac{x+y}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Lösning: Detta är en linjär 1:a ordn. diff. ekv

$$y' - \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}x$$

Multiplicera med $e^{-\frac{1}{2}x}$ (integrerande faktor) vilket ger

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{2}x}\cdot y(x)\right) = \tfrac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$$

Vidare gäller $\int \frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}\,dx = \{PI\} = (-x)e^{-\frac{1}{2}x} +$

$$+\int e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = -xe^{-\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x} + C, \quad C\in\mathbb{R}$$

Alltså $y(x) = -x - 2 + Ce^{\frac{1}{2}x}$

Villkoret $y(0) = 1$ ger $1 = -2 + C$ dvs $C = 3$

Svar: $y(x) = 3e^{\frac{1}{2}x} - x - 2$.

③ Lös

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = e^x(1+x^2) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Lösning. Kar. ekv. $0 = r^2 + 2r + 2 = (r+1)^2 - i^2 =$

$= (r+1+i)(r+1-i)$. Alltså $r_{1,2} = -1 \pm i$

Detta ger $y_h(x) = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x$.

Ansätt $y_p(x) = e^{x} \cdot z(x)$. Derivering och insättning i diff-ekv ger

$$z'' + 2z' + z + 2(z' + z) + 2z = 1 + x^2$$

dvs $z'' + 4z' + 5z = 1 + x^2$

Ansätt $z(x) = ax^2 + bx + c$. Derivering och insättning ger

$$2a + 4(2ax + b) + 5(ax^2 + bx + c) = 1 + x^2$$

Vi får

$$5a = 1, \quad 8a + 5b = 0, \quad 2a + 4b + 5c = 1$$

dvs $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{8}{25}$, $c = \frac{47}{125}$

Allmänna lösningen till diff-ekv ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x + e^{x}\left(\frac{x^2}{5} - \frac{8x}{25} + \frac{47}{125}\right)$$

Konstanterna A och B bestäms av $y(0) = y'(0) = 0$

$$\begin{cases} 0 = y(0) = A + \frac{47}{125} & \text{dvs } A = -\frac{47}{125} \\ 0 = y'(0) = -A + B + \left(\frac{47}{125} - \frac{8}{25}\right) & \text{dvs } B = -\frac{54}{125} \end{cases}$$

Svar: $y(x) = \frac{1}{125}\left(-47e^{-x}\cos x - 54e^{-x}\sin x + e^{x}(25x^2 - 40x + 47)\right)$.

④ Beräkna

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \cos x}{x^4}$$

Lösning: För att Taylorutveckla täljaren använder vi standardutvecklingarna

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 \cdot B_1(x) \qquad x \text{ nära } 0$$

$$e^{t} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^3 B_2(t) \qquad t \text{ nära } 0$$

Med $t = \frac{x^2}{2}$ fås $e^{\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + x^6 B_3(x)$ $\quad x$ nära 0

Alltså $1 - e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \cos x = 1 - \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + x^6 B_3(x)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^6 B_1(x)\right)$

$$= 1 - \left(1 + 0x^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24}\right)x^4 + x^6 B_4(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{12}x^4 + x^6 B_5(x)$$

Detta ger $\frac{1 - e^{\frac{x^2}{2}} \cos x}{x^4} = \frac{1}{12} + x^2 B_5(x) \to \frac{1}{12}, \quad x \to 0$

När är B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 begränsade i en omgivning kring 0

Svar: $\frac{1}{12}$

(5) Bestäm de $p \in \mathbb{R}$ för vilka $\int_0^\infty \frac{1}{(x^3+1)^p}\,dx$ konvergerar.

<u>Lösning</u>: Då $\left(\frac{1}{2}\right)^p \leq \frac{1}{(x^3+1)^p} \leq 1$ för $x \in [0,1]$ gäller att $\int_0^\infty \frac{1}{(x^3+1)^p}\,dx$ konvergerar om och endast om $\int_1^\infty \frac{1}{(x^3+1)^p}\,dx$ konvergerar. Vi vet att $\int_1^\infty \frac{1}{x^q}\,dx$ konvergerar om och endast om $q > 1$.

Fall 1: $3p > 1$

Vi noterar att $0 \leq \frac{1}{(x^3+1)^p} \leq \frac{1}{x^{3p}}$ för $x \in [1,\infty)$ och $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3p}}\,dx$ konvergerar. Jämförelsesatsen ger att $\int_1^\infty \frac{1}{(x^3+1)^p}\,dx$ konvergerar.

Fall 2: $3p \leq 1$

Vi noterar att $0 \leq \frac{1}{2^p}\frac{1}{x^{3p}} = \frac{1}{(x^3+x^3)^p} \leq \frac{1}{(x^3+1)^p}$ för $x \in [1,\infty)$ och $\int_1^\infty \frac{1}{2^p}\frac{1}{x^{3p}}\,dx$ divergerar.

Jämförelsesatsen ger att $\int_1^\infty \frac{1}{(x^3+1)^p}\,dx$ divergerar.

<u>Svar</u>: Konvergerar för $p > \frac{1}{3}$ och divergerar för $p \leq \frac{1}{3}$

(6) Sätt $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x+2}}$, $x \in [0,1]$. Området begränsat av grafen till f, x-axeln, $x=0$ och $x=1$ roteras kring x-axeln. Bestäm rotationskroppens volym V.

<u>Lösning</u>: $V = \pi\int_0^1 (f(x))^2\,dx$. För att beräkna en primitiv funktion till $(f(x))^2$ partialbråksuppdelas.

$$\frac{1}{(1+x^2)^2(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{1+x^2} + \frac{Dx+E}{(1+x^2)^2}$$

Vi noterar att $A = \frac{1}{25}$ och $B = -\frac{1}{25}$. Vidare fås

$x=1$: $\frac{1}{12} = \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{3} + \frac{-\frac{1}{25}+C}{2} + \frac{D+E}{4}$

$x=0$: $\frac{1}{2} = \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2} + C + E$

$x=-1$: $\frac{1}{4} = \frac{1}{25} + \frac{\frac{1}{25}+C}{2} + \frac{-D+E}{4}$

vilket ger (efter lite räknande)

$A = \frac{1}{25}$, $B = -\frac{1}{25}$, $C = \frac{2}{25}$, $D = -\frac{5}{25}$, $E = \frac{10}{25}$

Alltså gäller

$$25\int_0^1 (f(x))^2\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+2} + \frac{2-x}{1+x^2} + \frac{10-5x}{(1+x^2)^2}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx +$$

$$+ 10\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx + \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

där vissa omskrivningar gjorts. Vi har nu

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx = \ln(x+2)\Big|_{x=0}^{1} = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\Big|_{x=0}^{1} = \arctan 1 - \arctan 0 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln(1+x^2)\Big|_{x=0}^{1} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0}^{1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Slutligen gäller

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 x\cdot\underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^2}}_{-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}\,dx =$$

$$\overset{PI}{=} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\left(\left(x\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_{x=0}^{1} - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$$

Detta ger totalt

$$25\int_0^1 (f(x))^2\,dx = \ln\frac{3}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\ln 2 + 10\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) +$$

$$+ \frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{7\pi}{4} + \frac{5}{4}$$

Detta ger oss

$$V = \frac{\pi}{25}\left(\ln\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{7\pi}{4} + \frac{5}{4}\right)$$

<u>Svar</u>: $\frac{\pi}{25}\left(\ln\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{7\pi}{4} + \frac{5}{4}\right)$

7. Beräkna $\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$ för $z = (\sqrt{3}-i)^{50}\cdot(1-i\sqrt{3})^{30}$.

<u>Lösning</u>: Vi skriver $\sqrt{3}-i$ och $1-i\sqrt{3}$ på polär form.

Vi har

$$\sqrt{3}-i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right) = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}$$

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})}$$

Detta ger $z = 2^{50+30}\cdot e^{i(50(-\frac{\pi}{6})+30(-\frac{\pi}{3}))}$

Omskrivning

$$50\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+30\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\pi\cdot\frac{110}{6}=-9\cdot 2\pi-\frac{\pi}{3}$$

ger $e^{i\left(50\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+30\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}=e^{-i\frac{\pi}{3}}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=$

$=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Alltså gäller $\operatorname{Re} z=2^{50+30}\cdot\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z=2^{50+30}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

och följdaktligen $\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Svar: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(8) Lös $xy'=y(1+\ln y-\ln x)$ $x>0$ med $y(1)=e$

genom att införa $y(x)=x\cdot z(x)$

Lösning: Då $y'(x)=\frac{d}{dx}(x\cdot z(x))=z(x)+xz'(x)$ får

$x(z+xz')=xz(1+\ln(xz)-\ln x)$, $x>0$

dvs $xz'+z=z(1+\ln z)$

Alltså $z'=\frac{1}{x}\cdot z\ln z$

För $z>0, \neq 1$ gäller

$\frac{1}{z\ln z}z'=\frac{1}{x}$, $x>0$ (obs: $y(1)=e$ dvs $z(1)=e$)

vilket är en separabel diff ekv. Vi får

$\ln|\ln z|=\ln x+C=\ln x+\ln\tilde{C}$, $\tilde{C}>0$

Alltså $|\ln z|=\tilde{C}x$, $\tilde{C}>0$, $x>0$

dvs $\ln z=\hat{C}x$, $\hat{C}\neq 0$, $x>0$. Detta ger

$z(x)=e^{\hat{C}x}$ dvs $y(x)=xe^{\hat{C}x}$. Villkoret $y(1)=e$

ger slutligen $\hat{C}=1$.

Svar: $y(x)=xe^{x}$.