Tentamen i Matematisk analys D TMV170, MMGD30, 2015-08-25

Kl. 8.30 – 12.30. Telefonvakt: Tim Cardilin, 0703-088304
Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare.
Totalpoäng: 50. Betygsgränser: 20, 30 och 40, resp 20 och 36.

I de fall då en funktion efterfrågas, ange även funktionens definitionsmängd.

1. Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = cos(x)e^y$, $y(\pi) = -\ln(2)$. (6 p)

2. Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + \frac{y}{2x} = 1$, $y(1) = 1$. (6 p)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $2y'' - 3y' + y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (8 p)

4. Bestäm
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{e^x - 1 - x},$$
genom att Taylorutveckla täljare och nämnare. (6 p)

5. Betrakta det område som begränsas av $f(x) = e^x - ex$ och $g(x) = 1 - x$. (Kurvorna skär varandra då $x = 0$ samt då $x = 1$.) Beräkna volymen hos den kropp som uppstår då området roteras runt x-axeln. (6 p)

6. Beskriv och skissa mängden av alla $z \in \mathbf{C}$ sådana att $i(z^2 - \bar{z}^2) = 4$. (6 p)

7. Tjockleken på en cylinderformad burks hölje anses vara konstant (och tunt). Bestäm hur burkens höjd ska förhålla sig till radien i burkens bottenarea, om volymen ska maximeras med avseende på fix materialåtgång. (6 p)

8. Visa att Newtons metod applicerad på ekvationen $\frac{2x}{1+x^2} = 0$ konvergerar (d.v.s. närmar sig en lösning) för alla startvärden $x_0 \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. (6 p)

Svar till tentamen i Matematisk analys D TMV170

Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare.
Totalpoäng: 50. Betygsgränser: 20, 30 och 40, resp 20 och 36.

1.

$$
\begin{aligned}
y' &= \cos(x)e^{y} \Rightarrow \\
y'e^{-y} &= \cos(x) \Rightarrow \\
\int y'e^{-y}\mathrm{d}x &= \int \cos(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \\
\int e^{-y}\mathrm{d}y &= \int \cos(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \\
-e^{-y} &= \sin(x) + C
\end{aligned}
$$

Begynnelsevillkoret $y(\pi) = -\ln(2)$ ger nu $C = -2$, varefter det är enkelt att lösa ut $y = -\ln\left(2 - \sin(x)\right)$. Denna lösning är giltig för alla $x \in \mathbf{R}$.

2.

$$
\begin{aligned}
y' + \frac{y}{2x} &= 1 \Rightarrow \\
e^{\int 1/(2x)dx}y' + e^{\int 1/(2x)dx}\frac{y}{2x} &= e^{\int 1/(2x)dx} \Rightarrow \\
\sqrt{x}y' + \frac{y}{2\sqrt{x}} &= \sqrt{x} \Rightarrow \\
\int \sqrt{x}y' + \frac{y}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \int \sqrt{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \\
\sqrt{x}y &= \frac{2}{3}x^{3/2} + C
\end{aligned}
$$

Nu ger begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ oss $C = 1/3$ varefter vi löser ut $y = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, vilket är giltigt endast för $x > 0$.

3. Den karakteristiska ekvationen för $2y'' - 3y' + y = 0$ är $2r^2 - 3r + 1 = 0$ med lösningarna $r = 1$ och $r = 1/2$. Lösningen till den homogena differentialekvationen blir $y_H = Ae^{x} + Be^{x/2}$. Vi ansätter ett förstagradspolynom som partikulärlösning $y_P = Cx + D$, vilket ger

$$y_P' = C \text{ och } y_P'' = 0.$$

Insättning i $2y'' - 3y' + y = x$ ger $0 - 3C + Cx + D = x$, alltså $C = 1$ och $D = 3$.
Vi har $y = Ae^{x} + Be^{x/2} + x + 3$, och därmed även $y' = Ae^{x} + Be^{x/2}/2 + 1$. Insättning av begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger $1 = A + B + 3$. Insättning av begynnelsevillkoret $y'(0) = 0$ ger $0 = A + B/2 + 1$. Ekvationssystemet av $A = 0$ och $B = -2$, varför vi får $y = x + 3 - 2e^{x/2}$ för alla x.

4. Vi har

$$
\begin{aligned}
\cos(2x) &= 1 - 2x^2 + x^3B_1(x), \text{ och} \\
e^{x} &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3B_2(x),
\end{aligned}
$$

så att

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-x^3B_1(x)}{x^2/2+x^3B_2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2-xB_1(x)}{1/2+xB_2(x)}=4,$$

där B_1 och B_2 är funktioner begränsade inom ett öppet intervall innehållandes 0.

5. Volymen är

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1 (g(x))^2-(f(x))^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1(1-x)^2-(e^x-ex)^2\mathrm{d}x\\&=\pi\left[-\frac{(1-x)^3}{3}\right]_0^1-\pi\int_0^1 e^{2x}-2exe^x+e^2x^2\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{3}-\pi\left[\frac{e^{2x}}{2}-2e(xe^x-e^x)+\frac{e^2x^3}{3}\right]_0^1=\\&=\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi e^2}{6}+\frac{\pi}{2}+2\pi e=\frac{\pi}{6}\left(5+12e-5e^2\right)\end{aligned}$$

6. Sätt $z=a+bi$. Vi får $z^2=a^2-b^2+2abi$ och $\bar{z}^2=a^2-b^2-2abi$, varför vi är ute efter z sådana att $-4ab=4$, alltså $b=-1/a$, för alla $a\neq 0$, $a,b\in\mathbf{R}$. (*För full poäng måste man skissa grafen också.*)

7. Kalla höjden h och radien i bottenarean för r. Höljets area är $2\pi r^2+2\pi hr$. Materialåtgången är proportionell mot höljets area, alltså proportionell mot $M=r^2+hr$. Detta ger $h=(M/r)-r$. Volymen är $V=\pi hr^2=\pi Mr-\pi r^3$. Vi ska nu maximera $V(r)$. Vi har $V'(r)=\pi M-3\pi r^2$, så $V'(r)=0$ ger $M=3r^2$. Eftersom $V''(r)=-6\pi r<0$ för alla $r>0$ ser vi att vi maximerat volymen. Vi har alltså $h=(M/r)-r=2r$.

   Maximal volym i förhållande till materialåtgång ges då höjden är dubbla radien, $h=2r$.

8. Vi har

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}\text{ och }f'(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

   Med Newtons metod får vi

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k(1+x_k^2)}{1-x_k^2}=\frac{-2x_k^3}{1-x_k^2}.$$

   Om vi nu sätter $x_0=1/\sqrt{3+\epsilon_0}$ eller $x_0=-1/\sqrt{3+\epsilon_0}$ för något $\epsilon_0>0$ får vi

$$|x_1|=\frac{2}{2+\epsilon_0}|x_0|<|x_0|.$$

   Eftersom $|x_1|<|x_0|$ får vi $x_1=1/\sqrt{3+\epsilon_1}$ eller $x_1=-1/\sqrt{3+\epsilon_1}$, för något $\epsilon_1>\epsilon_0$. Ett upprepande av proceduren ovan ger

$$|x_k|\leq|x_0|\prod_{i=0}^{k-1}\frac{2}{2+\epsilon_i}\leq|x_0|\left(\frac{2}{2+\epsilon_i}\right)^k.$$

vilket för alla $\epsilon > 0$ går mot 0 då k går mot oändligheten. Alltså konvergerar algoritmen.

Observera speciellt att det är otillräckligt att visa att $|x_0|, |x_1|, \ldots$ är en avtagande sekvens, eftersom den i så fall skulle kunna konvergera mot ett positivt värde.

Tentamen i Matematisk analys D TMV170, MMGD30, 2015-04-14

Kl. 8.30 – 12.30. Telefonvakt: Anders Martinsson, 0703-088304
Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare.
Totalpoäng: 50. Betygsgränser: 20, 30 och 40, resp 20 och 36.

I de fall då en funktion efterfrågas, ange även funktionens definitionsmängd.

1. Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = xy^2$, $y(0) = 1$. (6 p)

2. Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + 2\frac{y}{x} = -\frac{2}{x(1-x^2)}$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. (6 p)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' + 4y = 25\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (8 p)

4. Betrakta det område som begränsas av kurvan $y = e^{-x^2}$ och x-axeln för $x \geq 1$. Beräkna volymen av den kropp som bildas då detta område roteras runt y-axeln. (6 p)

5. Finn alla talpar (a, b) sådana att $y = x^2 + ax + b$ tangeras av både $y = x$ och $y = -2x$. (6 p)

6. Låt x_i och y_i vara konstanter för $i = 1, \dots, n$. Bestäm b så att

$$Q(b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - bx_i)^2$$

minimeras. (6 p)

7. Newtons andra lag säger att accelerationen hos ett objekt ges av kraften det utsätts för, dividerat med dess massa, $a = F/m$, eller vanligare uttryckt $F = ma$. Ett objekt med massan m är stillastående vid tiden 0. Objektet utsätts för en konstant kraft g, och i motsatt riktning en kraft som är proportionell mot objektets hastighet, med proportionalitetskonstant k. Bestäm objektets hastighet vid tiden t. (6 p)

8. Approximera $y(4)$ med Eulers metod med steglängd 1, där

$$y(x) = 1 + \int_1^x y(t)(t - y(t))\mathrm{d}t.$$

(6 p)

Lösningsförslag till Tentamen i Matematisk analys D
TMV170, MMGD30, 2015-04-14

Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare.
Totalpoäng: 50. Betygsgränser: 20, 30 och 40, resp 20 och 36.

1.

$$
\begin{aligned}
y' &= xy^2 \\
y'/y^2 &= x \\
-1/y &= x^2/2 + C \\
y &= -\frac{2}{2C + x^2}
\end{aligned}
$$

Från $y(0) = 1$ får vi $1 = \quad 2/(2C) \Leftrightarrow C = -1$. Alltså får vi

$$
y = \frac{2}{2 - x^2}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).
$$

2.

$$
\begin{aligned}
y' + 2\frac{y}{x} &= -\frac{2}{x(1 - x^2)} \\
e^{2\ln x} y' + 2e^{2\ln x}\frac{y}{x} &= -\frac{2}{x(1 - x^2)} e^{2\ln x} \\
x^2 y' + 2xy &= -\frac{2x}{1 - x^2} \\
x^2 y &= \ln(1 - x^2) + C \\
y &= \frac{\ln(1 - x^2) + C}{x^2}
\end{aligned}
$$

Lösningen är giltig för $0 < x < 1$, oavsett C. Från $y(1/2) = 0$ får vi $C = -\ln(3/4) = \ln(4) - \ln(3)$.

3.

$$
\begin{aligned}
y'' + 4y' + 4y &= 25\sin x \\
r^2 + 4r + 4 &= 0 \\
r &= -2 \\
y_h &= (A + Bx)e^{-2x} \\
y_p &= C\sin(x) + D\sin(x) \\
y_p' &= C\cos(x) - D\sin(x) \\
y_p'' &= -C\sin(x) - D\cos(x) \\
y_p'' + 4y_p' + 4y_p &= (3C - 4D)\sin(x) + (4D + 3C)\cos(x) = 25\sin(x)
\end{aligned}
$$

Lösningen till det lineära ekvationssystemet ges av $C = 3$ och $B = -4$.

$$
y = y_h + y_p = (A + Bx)e^{-2x} + 3\sin(x) - 4\cos(x)
$$

Från $y(0) = 0$ får vi $A = 4$. Från $y'(0) = 1$ och $A = 4$ får vi $B = 12$.

$$
y = (4 + 12x)e^{-2x} + 3\sin(x) - 4\cos(x), x \in \mathbb{R}
$$

4. Volymen ges av

$$V = \pi \int_1^{\infty} 2xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \left[-e^{-x^2}\right]_1^{\infty} = \frac{\pi}{e}.$$

5. Vi har

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + ax + b \\ f'(x) &= 2x + a \end{aligned}$$

Tangenten till f i punkten $(c, f(c))$ ges av

$$y = (2c + a)x + c^2 + ac + b - (2c + a)c = (2c + a)x - c^2 + b.$$

Låt $y = x$ vara tangenten i punkten $(c, f(c))$ och $y = -2x$ vara tangenten i punkten $(d, f(d))$. Då vi identifierar koefficienter får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 = (2c + a) \\ 0 = -c^2 + b \\ -2 = (2d + a) \\ 0 = -d^2 + b \end{cases}$$

Subtrahera andra från sista ekvationen för att få $c = \pm d$. Om $c = d$ ger första och tredje ekvationen att $1 = -2$, vilket är falskt, alltså är $c + d = 0$. Addera första och tredje ekvationen för att få $a = -1/2$. Det följer att $c = 3/4$, $d = -3/4$ och $b = 9/16$.

Endast en lösning, $(a, b) = (-1/2, 9/16)$.

6. Vi har

$$\begin{aligned} Q(b) &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i)^2 \\ Q'(b) &= -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - bx_i). \end{aligned}$$

Då $x_i = 0$ för alla i är Q konstant, och alla b är globala minima. Då minst ett $x_i \neq 0$ sätter vi $Q'(b) = 0$ och löser ut b, vilket ger att lokalt extremvärde finns i

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Då Q är kontinuerligt och $Q(b) \to \infty$ då $b \to \pm\infty$ så måste det lokala extremvärde vi funnit vara ett globalt minimum.

7. Vi har $F = ma$ (Newton's andra lag), där F är kraften, m är massan och a är accelerationen. Vi låter v vara objektets hastighet ($v' = a$) och får differentialekvationen

$$v' = g/m - kv/m,$$

med lösningen

$$v = \frac{g}{k} + Ce^{-kt/m}.$$

Då vi använder begynnelsevillkoret $v(0) = 0$ får vi

$$v(t) = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt/m}).$$

8. Approximera $y(4)$ med Eulers metod med steglängd 1, där

$$y(x) = 1 + \int_1^x y(t)(t - y(t))\mathrm{d}t.$$

(6 p)

Sätt $x = 1$ för att få ut $y(1) = 1$. Derivera integralekvationen för att få $y' = y(x - y)$. Låt $h = 1$ vara steglängden. Vi får

$$y_{approx}(2) = y(1) + h \cdot y'(1) = 1 + 1 \cdot y(1)(1 - y(1)) = 1$$
$$y_{approx}(3) = y_{approx}(2) + h \cdot y'_{approx}(2) = 1 + 1 \cdot y_{approx}(2)(2 - y_{approx}(2)) = 2$$
$$y_{approx}(4) = y_{approx}(3) + h \cdot y'_{approx}(3) = 2 + 1 \cdot y_{approx}(3)(3 - y_{approx}(3)) = 4$$

Vår (grova) approximation ger alltså $y_{approx}(4) = 4$.

Tentamen i Matematisk analys D, TMV170 och MMGD30, 2015-03-19

Klockan 14.00–18.00 Telefonvakt: Tim Cardilin, 070-308 83 04
Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare.
Totalpoäng: 50. Betygsgränser: 20, 30 och 40, resp 20 och 36.

1. Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = (1 + \ln x)(1 + y)$, $y(1) = 1$. (6 p)

2. Lös begynnelsevärdesproblemet $3y = (x - 1)y' + 6x^2 - 2x - 4$, $y(2) = 13$. (6 p)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' = -y - 2\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$. (8 p)

4. Betrakta det område som begränsas av $f(x) = e^x - ex$, x-axeln och y-axeln. Beräkna volymen hos den kropp som uppstår då området roteras runt x-axeln. (6 p)

5. Beskriv och skissa mängden av alla $z \in \mathbf{C}$ sådana att $|z - i| = z + \bar{z}$. (6 p)

6. Bestäm arean av den största rektangel som får plats mellan x-axeln och kurvan e^{-x^2}, då rektangelns ena sida ska ligga på x-axeln. (6 p)

7. Lös integralekvationen

$$y = \pi + 2\int_0^{\ln x} y(e^t)\,\mathrm{d}t.$$

(6 p)

8. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

(6 p)

Lösningar till Tentamen i Matematisk analys D TMV170, MMGD30, 2015-03-19

Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare.
Totalpoäng: 50. **Betygsgränser:** 20, 30 och 40, resp 20 och 36.

1.

$$\begin{aligned} y' &= (1+\ln x)(1+y) \\ \frac{y'}{1+y} &= 1+\ln x \\ \ln(1+y) &= D + x\ln x \\ 1+y &= e^D e^{x\ln x} \\ y = -1 + Ce^{x\ln x} &= Cx^x - 1 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} y' &= (1+\ln x)(1+y) \\ y' - (1+\ln x)y &= 1+\ln x \\ e^{-x\ln x}y' - e^{-x\ln x}(1+\ln x)y &= e^{-x\ln x}(1+\ln x) \\ e^{-x\ln x}y &= -e^{-x\ln x} + C \\ y = -1 + Ce^{x\ln x} &= Cx^x - 1 \end{aligned}$$

Från $y(1) = 1$ får vi

$$\begin{aligned} 1 &= -1 + Ce^0 \\ C &= 2 \\ y = 2e^{x\ln x} - 1 &= 2x^x - 1 \end{aligned}$$

Då $\ln x$ ska exister gäller $y = 2e^{x\ln x} - 1 = 2x^x - 1$ endast för $x > 0$.

2.

$$\begin{aligned} 3y &= (x-1)y' + 6x^2 - 2x - 4 \\ y' - 3(x-1)^{-1}y &= -6x - 4 \\ (x-1)^{-3}y' - 3(x-1)^{-4}y = -(6x+4)(x-1)^{-3} &= -6(x-1)^{-2} - 10(x-1)^{-3} \\ (x-1)^{-3}y &= 6(x-1)^{-1} + 5(x-1)^{-2} + C \\ y &= C(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 5(x-1) \end{aligned}$$

Från $y(2) = 13$ får vi $13 = C + 6 + 5$ och $C = 2$.

$$y = 2(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 5(x-1) = (x-1)(2x^2 + 2x + 1)$$

I beräkningarna ovan har vi formellt dividerat med $x - 1$, men $x = 1$ är inget problem i vare sig den ursprungliga ekvationen, eller i $y = (x - 1)(2x^2 + 2x + 1)$, vilket alltså gäller på hela $\mathbb{R}$.

3.

$$
\begin{aligned}
y'' + y &= -2\sin x \\
r^2 + 1 &= 0 \\
r &= \pm i \\
y_h = A_c e^{ix} + B_c e^{-ix} &= A\sin(x) + B\cos(x) \\
y_p &= Cx\sin(x) + Dx\cos(x) \\
y_p' &= C\sin(x) + Cx\cos(x) + D\cos(x) - Dx\sin(x) \\
y_p'' &= 2C\cos(x) - Cx\sin(x) - 2D\sin(x) - Dx\cos(x) \\
y_p'' + y_p = 2C\cos(x) - 2D\sin(x) &= -2\sin(x) \\
C &= 0, D = 1 \\
y = y_h + y_p &= A\sin(x) + B\cos(x) + x\cos(x)
\end{aligned}
$$

Från $y(0) = 0$ får vi $B = 0$. Från $y'(0) = -1$ får vi $-1 = A + 1$.

$$y = -2\sin(x) + x\cos(x), x \in \mathbf{R}$$

4. Radien hos en skiva blir $e^x - ex$. Arean av en skiva blir $\pi(e^x - ex)^2 = \pi e^{2x} - 2\pi exe^x + \pi e^2x^2$. Volymen blir

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \pi e^{2x} - 2\pi exe^x + \pi e^2x^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{6}\left[3e^{2x} - 12e(x-1)e^x + 2e^2x^3\right]_{x=0}^1 = \frac{\pi}{6}(5e^2 - 12e - 3).
\end{aligned}
$$

5. Sätt $z = a + bi$. Vi får

$$
\begin{aligned}
|a + (b-1)i| &= a + bi + (a - bi) \\
\sqrt{a^2 + (b-1)^2} &= 2a \\
(b-1)^2 &= 3a^2 \text{ (med } a \geq 0) \\
b &= \pm\sqrt{3}a + 1 \text{ (fortfarande med } a \geq 0)
\end{aligned}
$$

Vi får alltså två strålar från punkten $0 + i$, med lutningarna $\sqrt{3}$ respektive $-\sqrt{3}$.

6. Då e^{-x^2} är en jämn funktion med avseende på x och avtagande för $x > 0$ kommer rektangeln att vara centrerad runt 0 i x-led. Av symmetriskäl kan vi nöja oss med att studera fallet $x \geq 0$. Om rektangeln far bredd $2x$ blir höjden e^{-x^2}. Vi får arean $A(x) = 2xe^{-x^2}$ och $A'(x) = (2 - 4x^2)e^{-x^2}$. $A'(x) = 0 \Rightarrow x = 1/\sqrt{2}$. I det fallet blir arean $\sqrt{2}/e^{1/2}$. För att kontrollera att detta är maximum kan vi observera att inga andra lokala extrempunkter finns, samt att

$$\lim_{x\to 0} 2xe^{-x^2} = 0 \text{ och } \lim_{x\to\infty} 2xe^{-x^2} = 0.$$

Alternativt observerar vi att $A''(x) = -(12x + 8x^3)e^{-x^2} \leq 0$ då $x \geq 0$, så vårt extremvärde är ett maximum.

7. Variabelsubstitutionen $u = e^t$ ger

$$y = \pi + 2\int_1^x \frac{y(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

Derivering ger nu

$$y' = 2y/x \Leftrightarrow y'/y = 2/x,$$

samtidigt som vi har $y(1) = \pi$.

$$\begin{aligned} \ln(y) &= 2\ln(x) + C \\ y &= Dx^2 \\ \pi = Dx^2 &\Rightarrow D = \pi \\ y &= \pi x^2 \end{aligned}$$

Då $\ln x$ ska existera gäller $y = \pi x^2$ endast för $x > 0$.

8. Vi identifierar summan som en Riemannsumma, och skriver om som integral, och får då

$$\int_0^1 \sin^2(\pi x)\mathrm{d}x.$$

Av symmetriskäl (eller genom att partialintegrera) har vi att denna integral är samma som

$$\int_0^1 \cos^2(\pi x)\mathrm{d}x.$$

Adderar vi båda intgraler får vi uppenbarligen integralen från 0 till 1 av 1, vilket är 1, varför den första integralen måste vara 1/2.

Alternativt så räknar vi på utan att tänka och får

$$\int_0^1 \sin^2(\pi x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi x)}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi}\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2}.$$

Tentamen i Matematisk analys D TMV170/MMGD30 den 26 aug -14 kl 8.30-12.30

Hjälpmedel: Beta, inga räknare Telefon: Jacob Hultgren 0703-088304 Totalpoäng 50 betygsgränser 20, 30 och 40 resp 20 och 36. Normalt är varje uppgift värd 6 poäng

1) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = \frac{y^2}{x}$ $\quad y(1) = 1$
2) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + \frac{y}{x} = e^x$ $\quad y(1) = e$
3) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + y = x + e^x$ $\quad y(0) = y'(0) = 0$ (8p)
4) Beräkna $\int_3^\infty \frac{dx}{(x^2-4)}$
5) Området begränsat av kurvorna $y = x$ och $y = x^2$ roteras kring x-axeln. Beräkna resulterande volym.
6) Vilken likbent triangel inskriven i en cirkel med radie R har störst area ?
7) Vilken kurva bildar $w = z^2$ om z löper genom linjen $Im(z) = 1$?
8) Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Tentamen i matematisk analys D TMV170 /MMGD30 den 13 mars -14

kl 14.00-18.00   Hjälpmedel: BETA, inga räknare Telefon: Anna Persson 0703-088304

Totalpoäng 50, Betygsgränser 20 , 30 ,40 resp 20 och 36 Normalt kan varje uppgift ge 6p.

1) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = y^2 x$ $y(0) = 1$
2) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ $y(0) = 1$
3) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - 3y' + 2y = x^2 + e^{3x}$ $y(0) = y'(0) = 0$ (8p)
4) Området beskrivet av $0 \le y \le e^{-2x}$ $0 \le x < \infty$ roteras kring x-axeln. Beräkna volymen av resulterande kropp.
5) Lös integralekvationen $y^2 = 1 + \int_1^x y^3\,dt$
6) Vad är den geometriska betydelsen av ekvationen $|z - i| = 2|z - 1|$?
7) Vad är maximum av $\sin x \sin y \sin z$ om x, y, z är vinklarna i en rätvinklig triangel ?
8) Låt y vara lösningen till begynnelsevärdesproblemet $y' = y^2 + x^3$ $y(0) = 0$. Vad är $\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x^4}$? (Tips: McLaurins formel)

Tentamen i matematisk analys D TMV170 / MMGD30 den 14 jan -14 kl 8.30-12.30

Hjälpmedel: BETA, inga räknare Telefon: Christoffer Standar 0703-088304 Totalpoäng 50 betygsgränser 20, 30 och 40 resp 20 och 36 Normalt ger varje uppgift 6p

1) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = \frac{\cos(x)}{y}$ $y(0) = 2$
2) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + \frac{y}{x} = \sin(x)$ $\lim_{x\to 0} y(x) = 0$
3) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y = e^{2x}$ $y(0) = y'(0) = 0$ (8p)
4) Området begränsat av x-axeln och kurvan $y = x(2-x)$ roteras kring x-axeln. Beräkna resulterande volym.
5) Integralekvationen $y = \int_0^{x^2} y(\sqrt{t})\frac{dt}{t}$ löses även av $konstant \times y$ om y är en lösning. Finn alla lösningar.
6) En cirkel med radie 1 placeras inuti parabeln $y = x^2$ så at den tangerar i två punkter. Bestäm tangeringspunkterna.
7) Vad är den geometriska betydelsen av ekvationen $|z|^2 = z + \bar{z}$?
8) Från kursen i diskret matematik kommer vi ihåg triangeltalen $t_n = \sum_1^n k = n(n+1)/2$. Visa att $\sum_1^\infty \frac{1}{t_n} = 2$

Tentamen i matematisk analys D TMV170 / MMGD30 den 14 jan -14 kl 8.30-12.30

Hjälpmedel: BETA, inga räknare   Telefon: Christoffer Standar 0703-088304   Totalpoäng 50

betygsgränser 20, 30 och 40 resp 20 och 36   Normalt ger varje uppgift 6p

1) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = \frac{\cos(x)}{y}$ $y(0) = 2$
2) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + \frac{y}{x} = \sin(x)$ $\lim_{x\to 0} y(x) = 0$
3) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y = e^{2x}$ $y(0) = y'(0) = 0$ (8p)
4) Området begränsat av x-axeln och kurvan $y = x(2-x)$ roteras kring x-axeln. Beräkna resulterande volym.
5) Integralekvationen $y = \int_0^{x^2} y(\sqrt{t})\,\frac{dt}{t}$ löses även av $konstant \times y$ om y är en lösning. Finn alla lösningar.
6) En cirkel med radie 1 placeras inuti parabeln $y = x^2$ så at den tangerar i två punkter. Bestäm tangeringspunkterna.
7) Vad är den geometriska betydelsen av ekvationen $|z|^2 = z + \bar{z}$?
8) Från kursen i diskret matematik kommer vi ihåg triangeltalen $t_n = \sum_1^n k = n(n+1)/2$. Visa att $\sum_1^\infty \frac{1}{t_n} = 2$

Tentamen i Matematisk analys D TMV170 och MMGD30 den 27 augusti -13 kl 8.30-12-30

Hjälpmedel: BETA, inga räknare Telefon: Jacob Leander 0703-088304 Totalpoäng 50 betygsgränser 20 ,30 och 40 resp 20 och 36 Om inget annat anges är uppgifterna värda 6p

1) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = y^2x$ y(1)=2
2) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' - xy = xe^{x^2}$ $y(0) = 0$
3) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - y' - 2y = x^2$ $y(0) = y'(0) = 0$ (8p)
4) Kurvan $y = 1 + \sin(x)$ $0 \leq x \leq 2\pi$ roteras kring x-axeln. Beräkna resulterande volym
5) En linje genom (2,1) avgränsar tillsammans med x- och y-axlarna en triangel. Vilken är den minsta arean av en sådan triangel?
6) Lös integralekvationen $y(x) = 2 + \int_0^x y(t)dt$
7) Visa att punkterna -1+5i, 1+i och 2-i ligger på en rät linje och bestäm linjens ekvation
8) Betrakta Newtons metod för ekvationen $x^3 = 1$. Vilka begynnelsevärden x_0 gör att metoden hänger sig ?

Tentamen i Matematisk analys D TMV170/MMGD30 den 14 mars -13 kl 8.30 -12.30

Hjälpmedel: BETA, inga räknare Telefon: Jakob Hultman 0703-088304 Totalpoäng 50, betygsgränser 20, 30 och 40 resp 20 och 36. Om inget annat uppges är uppgifterna värda 6p

1) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = \frac{y^2}{x}$ $\quad y(1) = 1$
2) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + \frac{1}{x^2}y = xe^{1/x}$ $\quad y(1) = 1$
3) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - 3y' + 2y = x^2$ $\quad y(0) = y'(0) = 0$
4) Området $0 \le y \le x^{2/3}$, $0 \le x \le 8$ roteras kring x-axeln. Beräkna volymen av resulterande kropp.
5) Lös för $x > 0$ differentialekvationen $x^2y'' - 3xy' + 2y = 0$ genom att förvandla den till en ekvation mod derivator m a p $t = \ln(x)$
6) Låt $c = 1 + i$. Vad är den geometriska tolkningen av ekvationen $Re(z\bar{c}) = 1$?
7) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 2y' + 2y = x + e^x \sin(x)$, $\quad y(0) = y'(0) = 0$ (8p)
8) En sjö med den konstanta volymen $V\ m^3$ innehåller vid tiden t $Q(t)$ mol av en förorening jämnt fördelad med koncentrationen $c(t) = Q(t)/V$. En å i vilken koncentrationen av samma förorening är k rinner in i sjön med $r\ m^3/min$ och lika mycket rinner ut ur sjön i dess utlopp. Dessutom kommer från luften $P\ mol/min$. Om $c(0) = c_0$ bestäm $c(t)$ och gränsvärdet när $t \to \infty$.

14/3 −13)   1) $y = \frac{1}{1-\ln x}$ 2) $y = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{e} - \frac{1}{2}\right)$

3) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} + \frac{13}{4}e^{2x} - 5e^x$ 4) $\frac{384\pi}{7}$

5) ~~$y = Ae^{(2+\sqrt{2})t}+$~~ $y = Ax^{2+\sqrt{2}} + Bx^{2-\sqrt{2}}$

6) Linjen $\operatorname{Im} z = 1 - \operatorname{Re} z$ 7) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} +$
$+ e^x\left(\frac{1}{8}\sin x - \frac{1}{8}\cos x\right) + e^{-x}\left(\frac{1}{8}\cos x + \frac{5}{8}\sin x\right)$

8) $c(t) = \frac{kr+p}{r} + e^{-\frac{rt}{V}}\left(C_0 - \frac{kr+p}{r}\right)$
$c(\infty) = \frac{kr+p}{r}$

27/8 −13)   1) $y = \frac{3}{2-x^2}$ 2) $y = e^{x^2} - e^{\frac{x^2}{2}}$

3) $y = \frac{1}{12}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ 4) $3\pi^2$

5) 4   6) $y = 2e^x$ 7) $\operatorname{Re} z(2-i) = 3$ eller
$2\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 3$ 8) $x_0 = 0$ och bakåtiterat

14/1 −14)   1) $y = \sqrt{2\sin x + 4}$ 2) $y = -\cos x + \frac{\sin x}{x}$

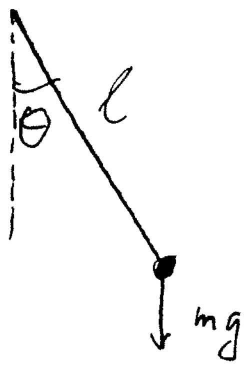
3) $y = \frac{1}{8}\left(e^{2x} - \cos 2x - \sin 2x\right)$ 4) $\frac{16\pi}{15}$

5) $y = Cx^2$ 6) $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$ 7) cirkel med
centrum och radie = 1

Tentamen i matematisk analys D TMV170/MMGD30 den 15 jan -13 kl 8.30-12.30

Hjälpmedel: BETA, inga räknare Telefon: Christoffer Standar 0703-088304 Totalpoäng 50
betygsgränser 20, 30 och 40 resp 20 och 36 Normalt sett ger varje uppgift 6p

1) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = \frac{y}{x^2}$ $y(1) = 1$
2) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + xy = e^{-x^2/2}$ $y(0) = 1$
3) Ge den allmänna lösningen till ekvationen $y'' + y' + y = 0$
4) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ $y(0) = y'(0) = 0$ (8p)
5) Området $\frac{2x}{\pi} \leq y \leq \sin(x)$ $0 \leq x \leq \pi/2$ roteras kring x-axeln. Beräkna resulterande volym.
6) Beräkna $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1} dx$
7) Vad blir $f(C)$ om cirkeln $C = \{z\epsilon\mathbb{C}: |z - 1 = 1|\}$ och $f(z) = iz$
8) Härled differentialekvationen för utslagsvinkeln $\theta(t)$ för en pendel som hänger i ett masslöst snöre. Beteckningar enligt figur.



Tentamen i Matematisk analys D, TMV170 och MMGD30 den 28 augusti -12 kl 8.30-12.30

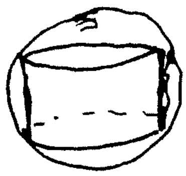
Hjälpmedel. BETA, inga räknare Telefon: Svitlana Ruzhytska 0703-088304 Om inget annat anges ger varje uppgift 6p. Betygsgränser 20,30,40 resp 20.36

1) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = xy \quad y(1) = 1$
2) Lös begynnelsevärdesproblemet $xy' + y = e^x \quad y(1) = 1$
3) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 2y' - 3y = e^{2x} \quad y(0) = y'(0) = 0$ (8p)
4) Området $x \le y \le \sqrt{x}$ (vilket medför $0 \le x \le 1$) roteras kring x-axeln. Beräkna resulterande volym.
5) Till kurvan $y = 1/x$ i första kvadranten dras en tangent. Tilsammans med axlarna bildar tangenten en triangel. Visa att dess area inte beror på tangeringspunkten. (Detta var tänkt att bli en max/min uppgift men själva maximeringen blev lite trivial)
6) Lös integralekvationen $2xy(x) = 1 + \int_1^x y(t)dt$
7) Visa att när x löper genom alla reella tal så bildar de komplexa talen $\frac{x}{x-i}$ en cirkel med centrum i ½ och radie ½
8) Funktionskurvan $y = y(x)$ går genom punkten (4,6) och har egenskapen att för varje a tangenten i (a,b) går genom (-a,0). Bestäm funktionen y(x)

Tentamen i Matematisk Analys D, TMV170 och MMGD30 den 8 mars -12

kl 8.30-12.30 Telefon: Dawan Mustafa 0703-088304 Hjälpmedel: BETA inga räknare Totalpoäng 50, normalt 6p per uppgift Betygsgränser 20,30 och 40 resp 20 och 36

1) Lös begynnelsevärdesproblemet $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$ $y(0) = 1$
2) Lös begynnelsevärdesproblemet $xy' - y = x^2e^x$ $y(1) = 1$
3) Lös begynnelsevärdesproblemet $(\sin x)y' + (\cos x)y = x\sin x$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ Tips: Du kan spara arbete genom att tänka efter innan du kör igång standardrutinen
4) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - y' - 2y = e^x + x$ $y(0) = y'(0) = 0$ (8p)
5) Området $1 \le y \le 1 + e^{-x}$ $x \ge 0$ roteras kring x-axeln. Beräkna resulterande volym.
6) Vilken är den största (räta cirkulära) cylinder som kan skrivas in i en sfär med radie R ?
7) Beskriv geometriskt mängden av komplexa tal z sådana att $|z-1| = |z-i|$
8) Låt $|f'(x)| \le M$ på intervallet [a,b]. Visa att felet i rektangelmetoden för integralen av f över intervallet är $\le hM(b-a)$ där h är steglängden.



8/3-12 1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

2) $y = \cancel{x}e^{x} + x - ex$ 3) $y = -\frac{x\cos x}{\sin x} + 1 - \frac{1}{\sin x}$

4) $y = -\frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{5}{12}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{-x}$

5) $\frac{5\pi}{2}$ 6) radie $R\sqrt{\frac{2}{3}}$ volym. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}R^3$

7) linjen $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$

28/8-12 1) $y = e^{\frac{x^2}{2} - 1}$ 2) $y = \frac{e^{x} + 1 - e}{x}$

3) $y = \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{20}e^{-3x}$ 4) $\frac{\pi}{6}$

5) Arean = 2 6) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 8) $y(x) = 3\sqrt{x}$

15/1-13 1) $y = e^{1 - \frac{1}{x}}$ 2) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}(x+1)$

3) $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

4) $y = \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{x} - e^{2x}$ 5) $\frac{\pi^2}{12}$

6) $\frac{1}{2}\ln 3$ 7) $\{w : |w - i| = 1\}$

8) $\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

Tentamen i Matematisk analys D TMV170 och MMGD30 den 12 jan -12

kl 8.30-12.30 Telefon: Emil Gustavsson 0703-088304 Hjälpmedel: BETA, inga räknare Totalpoäng 50, normalt 6p per uppgift Betygsgränser 20,30 och 40 resp 20 och 36

1) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = \frac{1}{xy}$, $y(1) = 2$
2) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' - 2xy = e^{x^2}$, $y(0) = 1$
3) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - 3y' + 2y = x + e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$ (8p)
4) Vad är arean av området (som består av två lika stora delar) mellan kurvorna $y = cosx$ och $y = 1 - \frac{4x^2}{\pi^2}$?
5) Vad blir volymen om området i uppgift 4 roteras kring x-axeln ?
6) Låt t löpa genom de reella talen. Skissa figuren $z = \frac{t-i}{t+i}$ i det komplexa planet. (Tips: beloppet)
7) Betrakta fritt fall med tyngdacceleration g och luftmotstånd proportionellt mot kvadraten på hastigheten hos den fallande kroppen. Inför beteckningar, ställ upp en differentialekvation, ange en lösningsmetod (men du behöver inte ge lösningen) och ange gränsvärdet när tiden växer av hastigheten.
8) Betrakta ekvationen 3x=2. Med utgångsintervallet [0,1] utför tre steg av intervallhalveringsmetoden för att lösa ekvationen. (Ja, jag vet att du kan lösa ekvationen exakt. Lös uppgiften)

Tentamen i Matematisk analys D TMV170 och MMGD30 den22 aug -11

kl 8.30-12.30 Telefon: Dawan Mustafa 0703-088304

Hjälpmedel: BETA , inga räknare Totalpoäng 50, normalt 6p/uppgift Betygsgränser 20,30,40 resp 20,36

1) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = \frac{x}{y}$ $y(1) = 2$
2) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' - y = 2xe^x$ y(0)=1
3) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + y = x$ y(0)=y'(0)=0
4) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - 3y' + 2y = sin2x$ $y(0) = y'(0) = 0$ (8p)
5) Området $0 \leq y \leq e^x\sqrt{x}$ $0 \leq x \leq 2$ roteras kring x-axeln. Beräkna resulterande volym
6) Visa att de komplexa talen 0,3+4i och 8-6i är hörn i en rätvinklig triangel
7) En bil bromsas in med en retardation som är proportionell (konstant k) mot kvadratroten ur hastigheten. Hur lång tid tar det att bromsa in bilen från hastigheten v_0 ?
8) Vad blir $y(0), y\left(\frac{1}{2}\right)$ och $y(1)$ om man använder Eulers metod med steg ½ på problemety$' = x^2 + y^2$ $y(0) = 0$?

Tentamen i Matematisk analys D, TMV170 och MMGD30

den 17 mars - 11 kl 8.30-12.30

Hjälpmedel : BETA, inga räknare telefon: Urban Larsson 0703-088304 Om inget annat anges kan varje uppgift ge 6p. Betygsgränser 20,30,40 resp 20,36

1) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' = 1 + y^2$ $y(0) = 1$
2) Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + \frac{y}{x} = \sin(x)$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
3) Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 3y' + 2y = 3e^x$ $y(0) = y'(0) = 0$ (8p)
4) Området begränsat av $y = 1 - x^2, y = 0 \; och \; x = 0$ roteras kring x-axeln. Beräkna resulterande volym.
5) Lös integralekvationen $y(x) = 1 + \int_1^x \frac{y(t)}{t} dt$
6) Vad är realdelen och imaginärdelen av $\frac{2-e^{it}}{2+e^{it}}$?
7) Ovanför ett cirkulärt bord med diametern 2meter hänger en punktljuskälla på h meters höjd. Belysningen i en punkt på bordet är $\cos(\theta)/4\pi d^2$ där d är avståndet till ljuskällan och θ är infallsvinkeln. (Tänk på extremfallen 0 och $\pi/2$ om du är osäker på vilken vinkel som avses) Bestäm höjden h så att belysningen längst ut på bordsskivan blir maximal.
8) Skriv upp iterationsformeln för Newtons metod för lösning av $\sin(x) = x/2$

17/3-11) 1) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 2) $y = -\cos x + \frac{\sin x}{x} - \frac{1}{x}$

3) $y = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{3}{2}e^{-x} + e^{-2x}$ 4) $\frac{\pi}{30}$ 5) $y = x$

6) $\frac{3}{5+4\cos t}$, $\frac{-4\sin t}{5+4\cos t}$ 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

8) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\sin x_n - \frac{x_n}{2}}{\cos x_n - \frac{1}{2}}$

22/8-11) 1) $y = \sqrt{x^2+3}$ 2) $y = x^2 e^{x} + e^{x}$

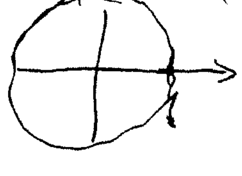
3) $y = x + \sin x$ 4) $y = \frac{3}{20}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{2}{5}e^{x}$

5) $\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{3e^4}{4}\right)$ 7) $t = \frac{2\sqrt{v_0}}{k}$ 8) $0, 0, \frac{1}{8}$

12/1-12) 1) $y = \sqrt{2\ln x + 4}$ 2) $y = xe^{x^2} + e^{x^2}$

3) $y = \frac{7}{12}e^{2x} - \frac{3}{2}e^{x} + \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

4) $2\left(\frac{\pi}{3} - 1\right)$ ($\approx 0{,}094$) 5) $\frac{\pi^2}{30}$ ($\approx 0{,}329$)

6) 

7) $\dfrac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = dt$ separabel, $\sqrt{\frac{gm}{k}}$

8) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, $\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]$ $\left(= \left[0{,}625, 0{,}75\right]\right)$