1 a) Om $f(x)$ är kontinuerlig och

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \text{ så gäller } F'(x) = f(t)$$

b) $$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} .$$

Nu är $$\frac{1}{h}\left(F(x+h) - F(x)\right) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$ Enligt integralkalkylens

medelvärdessats gäller $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)\int_x^{x+h} dt = f(\xi)h$

där ξ ligger mellan x och $x+h$. Speciellt gäller $\xi \to x$ då $h \to 0$.

Så $$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} f(\xi)h = \lim_{h \to 0} f(\xi) = f(x)$$

c) Eftersom $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ är $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$

kontinuerlig. Så

$$D\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = D\int_0^x f(t)\,dt = (\text{enl. a)}) = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

2 a) Vi har

$$\frac{x^3+2x^2-3x}{x^2-1} = \frac{x(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x+3)}{x+1} \to \frac{4}{2} = 2, \ x \to 1$$

b) Vi har

$$\frac{\ln x^2}{10\ln 2x} = \frac{2\ln x}{10(\ln x+2)} = \frac{1}{5(1+2/\ln x)}$$

$$\to \frac{1}{5(1+0)} = 5, \ x \to \infty.$$

---

3)

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx = \left(\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \quad dx = 2t\,dt \\ 0 \mapsto 0, \ \infty \mapsto \infty \end{array} \right) = 2\int_0^\infty t^2 e^{-t}\, dt =$$

$$= (\text{Part. int}) = 2\left(-t^2 e^{-t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2te^{-t}\, dt \right) = 4\int_0^\infty te^{-t}\, dt$$

$$= (\text{Part. int}) = 4\left(-te^{-t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\, dt \right) = 4\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^\infty = 4.$$

Vi har använt att $\lim_{t\to\infty} t^a e^{-t} = 0$.

---

4. Eftersom $f(x) = x^3 - 12|x| + 1$ är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[-1,3]$.
När $x \in [0,3]$ är $f(x) = x^3 - 12x + 1$ och $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ när $x = 2$ ($x = -2$ "ligger fel".)
När $x \in [-1,0)$ har vi $f(x) = x^3 + 12x + 1$ och $f'(x) = 3x^2 + 12 > 0$.
Så extremvärdena kan bara antas där $x = -1, x = 0, x = 2$ eller $x = 3$. Eftersom $f(-1) = -12$ $f(0) = 1$, $f(2) = -15$ och $f(3) = -8$ är största värdet 1 och minsta -15.

5) Med $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$ $(x \neq 1)$ har vi

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Vi får följande teckentabell

x		0		1		2	
$f'(x)$	$++$	0	$--$	ej def	$--$	0	$++$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	ej def	$\searrow$	5	$\nearrow$
		max				min	

Eftersom $\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty$ och $\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$

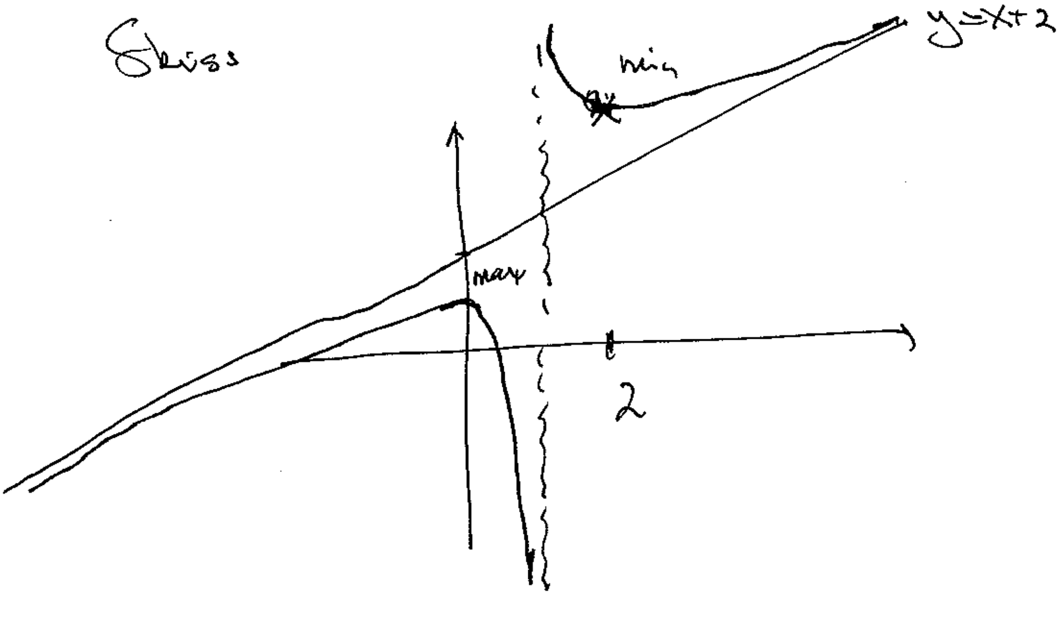
är $x = 1$ en lodrät asymptot.

Division ger

$$\frac{x^2+x-1}{x-1} = \frac{x^2-x+2x-1}{x-1} = x + \frac{2(x-1)+1}{x-1} =$$

$$= x+2+\frac{1}{x-1}.$$ Så $y = x+2$ är en sned asymptot. Vi ser också att $f(x)$ ligger över asymptoten då $x \to +\infty$ och under då $x \to -\infty$.

Skiss



6. $x=1$ i ekvationen $(x-1)y^3+y^2-xy=0$ (*) ger

$$y^2(1)-y(1)=0 \quad \text{med rötterna } y(1)=0 \text{ eller } y(1)=1$$

Eftersom vi vet att $y(1)>0$ så gäller $y(1)=1$

Derivering av (*) ger, med hjälp av kedjeregeln,

$$y^3+(x-1)3y^2y'+2yy'-y-xy'=0.$$

Sätter vi $x=1$ ger detta, eftersom $y(1)=1$

$$1+2y'(1)\times 1-y'(1)=0 \quad \text{eller} \quad y'(1)=0$$

---

7. Vi löser först den homogena ekvationen

$$y''+4y=0.$$

Den karakteristiska ekvationen, $r^2+4=0$, har rötterna $r=\pm 2i$. Så den allmänna homogenlösningen är

$$y_h=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

För att bestämma en partikulärlösning ansätter vi

$y_p=Ax^2+Bx+C$. Då är $y_p'=2Ax+B$ och $y_p''=2A$ och vi får

$$2A+4Ax^2+4Bx+4C=4x^2-4x+10$$

Så

$$\begin{cases} 4A=4 \\ 4B=-1 \\ 2A+4C=10 \end{cases} \quad \text{med lösningen} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$$

Så $y_p=x^2-x+2$ och den allmänna lösningen är

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x^2-x+2$$

och

$$y'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x+2x-1$$

Begynnelsevillkoren ger $y(0)=3:\ C_1+2=3$ och $y'(0)=1:\ 2C_2-1=1$ så $C_1=C_2=1$

Svar: $\cos 2x+\sin 2x+x^2-x+2$

8. Taylorutveckling av $\sin x$ ger

$$\sin\frac{1}{t} = \frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^3}\right),\ t \to 0.$$

Så $$\frac{1}{x}\int_1^x t\sin\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}\int_1^x dt + \frac{1}{x}\int_1^x O\left(\frac{1}{t^2}\right)dt = \mathrm{I}(x) + \mathrm{II}(x)$$

Nu gäller $$\mathrm{I}(x) = \frac{x-1}{x} = 1-\frac{1}{x} \to 1,\ x\to\infty.$$

För $\mathrm{II}(x)$ har vi

$$\frac{1}{x}\int_1^x O\left(\frac{1}{t^2}\right)dt \le \frac{C}{x}\int_1^x \frac{dt}{t^2} \le \frac{C\cdot K}{x} \to 0,\ x\to\infty$$

Här har vi använt att $\int_1^x \frac{dt}{t^2} \le \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = K$,

eftersom integralen konvergerar.

$\left(\int_1^\infty \frac{dt}{t^p}\right.$ konvergerar då $\left.p>1.\right)$

Så $$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x t\sin\frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\left(\mathrm{I}(x)+\mathrm{II}(x)\right) = 1+0 = \underline{1}.$$