Riemannintegralen,
definition och några resultat

Vi skall definiera Riemannintegralen av en begränad funktion på ett intervall $I = [a, b]$. (Det spelar ingen roll om intervallet är öppet, slutet eller halvöppet.)

Vi börjar med att definiera vad en trappfunktion på I är. Låt $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ vara en partition av I (se [A, sid 302]) och $I_1 = (x_0, x_1), I_2 = (x_1, x_2), \ldots, I_n = (x_{n-1}, x_n)$. Då kallas en funktion s som är konstant på I_i, dvs. $s(x) = c_i$ när $x \in I_i$, för en trappfunktion på I. (Det spelar ingen roll vad $s(x)$ har för värden då $x \in \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$.) Vi definierar integralen av en trappfunktion som ”arean med tecken”, dvs.

Definition 1. *Integralen av en trappfunktion på I definieras genom*

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i |I_i|.$$

Här är använder vi beteckningen $|I|$ för längden av ett intervall I. Så $|I_i| = x_i - x_{i-1}$.

Andra namn för trappfunktioner är stegfunktioner eller styckvis konstanta funktioner.

Integralen av trappfunktioner är linjär, dvs. om f och g är trappfunktioner så gäller

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx\ . \tag{1}$$

Bevis. För att bevisa detta kan vi anta att f och g är trappfunktioner på samma partition. Då är (1) en utsaga om ändliga summor och en direkt följd av distributiva och kommutativa lagarna. □

Härnäst definierar vi över- och underintegralen till en begränsad funktion.

Definition 2. *Överintegralen till en begränsad funktion f på I är*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{\int_a^b s(x)\,dx; s \text{ en trappfunktion med } s \geq f\right\}$$

och underintegralen

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{\int_a^b s(x)\,dx; s \text{ en trappfunktion med } s \leq f\right\} .$$

På grund av att f är begränsad är $\{s \text{ en trappfunktion med } s \geq f\}$ icke-tom och $\left\{\int_a^b s(x)\,dx; s \text{ en trappfunktion med } s \geq f\right\}$ en nedåt begränsad mängd av reeella tal. Så enligt supremumaxiomet är överintegralen väldefinierad. På liknande sätt är underintegralen väldefinierad. Dessutom har vi alltid

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx ,$$

se Övning 1.

När olikheten är en likhet är f integrerbar enligt följande definition.

Definition 3. *En begränsad funktion på ett begränsat intervall $[a, b]$ är* ***(Riemann)integrerbar*** *om $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.*

Om f är integrerbar betecknas ***integralen*** *av f över $[a, b]$*

$$\int_a^b f(x)dx$$

och är lika med detta gemensamma värde,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx .$$

Sats 4. *Funktionen f är integrerbar om och endast om det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner $\underline{s}$ och $\overline{s}$ med*

$$\underline{s}(x) \leq f(x) \leq \overline{s}(x) \text{ och } \int_a^b \overline{s}(x)\,dx - \int_a^b \underline{s}(x)\,dx < \epsilon .$$

Bevis. Om f inte är integrerbar så är $\epsilon = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx > 0$. Så om $\underline{s}$ och $\overline{s}$ är trappfunktioner med $\underline{s}(x) \leq f(x) \leq \overline{s}(x)$ gäller $\int_a^b \overline{s}(x)\,dx \geq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ och $\int_a^b \underline{s}(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Detta ger

$$\int_a^b \overline{s}(x)\,dx - \int_a^b \underline{s}(x)\,dx \geq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \epsilon\ .$$

Omvänt antar vi att f är integrerbar och att $\epsilon > 0$. Eftersom $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{\int_a^b s(x)\,dx; s \text{ en trappfunktion med } s \geq f\right\}$ finns en trappfunktion $\overline{s} \geq f$ med $\int_a^b \overline{s}(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2}$. På liknande sätt finns en trappfunktion $\underline{s}(x) \leq f$ med $\int_a^b \underline{s}(x)\,dx > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\epsilon}{2}$. Så

$$\int_a^b \overline{s}(x)\,dx - \int_a^b \underline{s}(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} - \left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon$$

eftersom $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. $\square$

Vi kan nu bevisa följande sats.

Sats 5. *Om f är monoton och begränsad på $[a, b]$ så är f integrerbar.*

Bevis. Vi bevisar satsen då f är växande. Beviset då f är avtagande är snarlikt. Ett alternativt sätt är att observera att om f är avtagande så är $-f$ växande, och alltså integrerbar, och sen använda Övning 2 med $\alpha = -1$.

Låt $\epsilon > 0$. Vi delar in intervallet $[a, b]$ in n lika långa delintervall. Så låt $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ där $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ och $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. Sätt $m_i = f(x_{i-1})$, $M_i = f(x_i)$ och låt $|I_i| = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ vara längden av I_i. Observera att eftersom f är växande så gäller $m_i \leq f(x) \leq M_i$ då $x \in I_i$.

Definiera $\overline{s}$ och $\underline{s}$ genom att $\overline{s}(x) = M_i$ och $\underline{s}(x) = m_i$ då $x \in I_i$. Då är $\underline{s}$ och $\overline{s}$ trappfunktioner och $\underline{s}(x) \leq f(x) \leq \overline{s}(x)$. Dessutom gäller

$$\begin{aligned}
\int_a^b \overline{s}(x)\,dx - \int_a^b \underline{s}(x)\,dx &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)|I_i| = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \\
&= \frac{b-a}{n}\Big(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \\
&\qquad + \ldots + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + f(x_n) - f(x_{n-1})\Big) \\
&= \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon
\end{aligned}$$

om n är tillräckligt stort. Så f är integrerbar enligt Sats 2. $\square$

Det är lätt att se att om intervallet $[a, b]$ kan delas upp i ändligt många intervall där f är monoton så är f integrerbar. Detaljerna överlämnas till den intresserade läsaren. Detta är uppfyllt för (nästan?) alla funktionerna i vår kurs så de är alla integrerbara. (Men inte funktionen i Exempel 6 nedan.)

I [A, App. IV, Thm. 5] visas att varje kontinuerlig funktion på $[a, b]$ är integrerbar. Svårigheten är att bevisa att om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ så är den likformigt kontinuerlig, jämför [A, App. IV, Thm. 4].

Exempel 6. *Funktionen f definierad av*

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ om } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ om } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

är inte *integrerbar på* $[0, 1]$.

Uppenbarligen gäller (Eller hur?) $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b \overline{s}(x)\,dx$ *där* $\overline{s}(x) = 1$ *för alla* x, *och* $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b \underline{s}(x)\,dx$ *där* $\underline{s}(x) = 0$ *för alla* x. *Så* $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 1 \neq 0 = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Att Riemannintegralen är linjär, [A, Theorem 3c, sid. 308] bevisas inte i [A].

Här bevisar vi att

$$\int_a^b f(x) + g(x)\ dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\ .$$

Att

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx\ ,$$

är lättare och lämnas som övning för den intresserade läsaren.

Vi börjar med

Lemma 7. *Antag att f och g är begränsade funktioner på intervallet $[a, b]$. Då gäller*

$$\text{(a)} \quad \overline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$$

och

$$\text{(b)} \quad \underline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx\ .$$

Bevis. Vi bevisar (a), beviset av (b) är likadant.

Låt $\epsilon > 0$ och tag trappfunktioner s_1 och s_2 med $s_1 \geq f$, $s_2 \geq g$, $\int_a^b s_1(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon$ och $\int_a^b s_2(x)\,dx < \overline{\int_a^b} g(x)\,dx + \epsilon$. Då är $s_1 + s_2$ en trappfunktion med $s_1 + s_2 \geq f + g$. Eftersom integralen av trappfunktioner är linjär får vi

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx &\leq \int_a^b s_1(x) + s_2(x)\,dx \\ &= \int_a^b s_1(x)\,dx + \int_a^b s_2(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx + 2\epsilon\ .\end{aligned}$$

Detta gäller för alla $\epsilon > 0$ och alltså

$$\overline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx\ .$$

$\square$

Vi kan nu enkelt bevisa

Sats 8. *Antag att f och g är integrerbara funktioner på intervallet $[a, b]$. Då är $f + g$ också integrerbar och*

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\ .$$

Bevis. Lemmat ger

$$\begin{aligned}&\overline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx = (f \text{ och } g \text{ integrerbara}) \\ &= \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

Så alla olikheterna är likheter. Speciellt gäller

$$\underline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx\ ,$$

och alltså är $f + g$ integrerbar. Dessutom är

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + g(x)\,dx &= \overline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx \\ &= \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\ .\end{aligned}$$

$\square$

Övning 1. Visa att vi alltid har $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Övning 2. Visa att om f är integrerbar så är αf också integrerbar och

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx\ .$$

Övning 3. Enligt Lemma 8 gäller $\overline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$. Finns det funktioner f och g så att $\overline{\int_a^b} f(x) + g(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$?

Övning 4. Låt f definieras av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ om } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ där SGD}(m,n){=}1 \text{ och } n > 0 \\ 0 \text{ om } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Anmärkning. Om m är ett heltal skriver vi $m = \frac{m}{1}$ och sätter $f(m) = 1$.

(a) För vilka x är $f(x)$ kontinuerlig?

(b) Visa att f är integrerbar på $[0,1]$.

(c) Vad är $\int_0^1 f(x)dx$?