

Tentamen, Matematisk analys, TMV170/MMGD30
Måndag den 10 juni 2019, 14⁰⁰ – 18⁰⁰

Varje uppgift ger maximalt 6 poäng utom uppgift 1 som kan ge 8 poäng.

1. (a) Vad är $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$?

(b) Bevisa ditt påstående i (a).

(c) Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x}$.

2. Beräkna

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$ och (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \ln x^2}{e^x \ln x + x^5}$.

3. Beräkna

$$\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} \, dx .$$

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y(x)y'(x) = \sin x, \quad 0 < x < \pi,$$

som för $x = \pi/2$ antar värdet $\sqrt{2}$.

5. Cirkeln $x^2 + y^2 = 5$ och kurvan $y = \frac{2}{x}$ avgränsar ett begränsat område i första kvadranten. Bestäm volymen av det område som bildas då detta område roterar runt x -axeln.

6. Bestäm lokala extrempunkter och asymptoter till kurvan

$$y = e^{-x} \frac{x}{2x + 1}$$

och skissera kurvan.

Var god vänd.

7. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) - y(x) = e^{-x} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases} .$$

8. Antag att $f(x)$ är en reellvärd och deriverbar funktion som uppfyller

$$(f(x))^3 + f(x) - 2x^3 = 0 .$$

- (a) Beräkna $f(1)$ och $f'(1)$.
- (b) Visa att $f(x)$ är strängt växande (och alltså inverterbar).
- (c) Beräkna $(f^{-1})'(1)$.