Tentamen, Matematisk analys, TMV170/MMGD30

10 juni 2019, Förslag till lösningar

1. (a) & (b): Se kurslitteraturen.

   (c)
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} 2\,\frac{\sin 6x/6x}{\sin 3x/3x} = 2\,\frac{1}{1} = 2\ .$$

2. (a) Vi har
   $$\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2+2x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{x-2}{x^2-x+1} \to -1, x \to 1\ .$$

   (b)
   $$\begin{aligned}\frac{e^x \ln x^2}{e^x \ln x + x^5} = \frac{2e^x \ln x}{e^x \ln x + x^5} &= 2\frac{1}{1+\frac{x^5}{e^x \ln x}}\\ &\to 2\frac{1}{1+0} = 2, x \to \infty,\end{aligned}$$

   på grund av det snabba växandet av e^x, $x \to \infty$.

3.
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\; dx &= \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{x}, x = t^2, dx = 2tdt \\ 0 \mapsto 0, \pi^2 \mapsto \pi \end{array}\right]\\ &= 2\int_0^{\pi} t\sin tdt = \left(\begin{array}{l}\text{partiell}\\ \text{integration}\end{array}\right)\\ &= 2\left(-t\cos t\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos tdt\right) = 2\left(\pi + \sin t\Big|_0^{\pi}\right) = 2\pi\ .\end{aligned}$$

4. Differentialekvationen är separabel. Vi skriver om den som
   $$y\frac{dy}{dx} = \sin x \text{ och } ydy = \sin xdx\ .$$
   Integration ger
   $$\frac{y^2}{2} = \int ydy = \int \sin xdx = -\cos x + C\ .$$
   $x = \pi/2$ ger $C = 1$ och vi får $y^2(x) = 2(1-\cos x)$ och $y(x) = \sqrt{2(1-\cos x)}$. (Lösningen $y(x) = -\sqrt{2(1-\cos x)}$ har fel värde då $x = \pi/2$.)

5. Vi använder skivformeln. Ekvationen $x^2 + (\frac{2}{x})^2 = 5$ har de positiva rötterna $x = 1$ och $x = 2$. Skivorna består av cirkelringar med yttre radie $\sqrt{5 - x^2}$ och inre radie $\dfrac{2}{x}$. Så dess area är $A(x) = \pi \left(5 - x^2 - \dfrac{4}{x^2}\right)$. Vi får
$$V = \int_1^2 A(x)dx = \pi \int_1^2 5 - x^2 - \frac{4}{x^2}\, dx = \frac{2}{3}\pi \ .$$

6. Funktionen $f(x) = e^{-x}\frac{x}{2x+1}$ är definierad då $x \neq -\frac{1}{2}$.

   Eftersom $\lim_{x\to -\frac{1}{2}+} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to -\frac{1}{2}-} f(x) = +\infty$ är $x = \frac{1}{2}$ en lodrät asymptot.

   Vidare är $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{-2x+1} = -\infty$ (eftersom e^x växer snabbare än x). Så $f(x)$ har ingen asymptot då $x \to -\infty$.

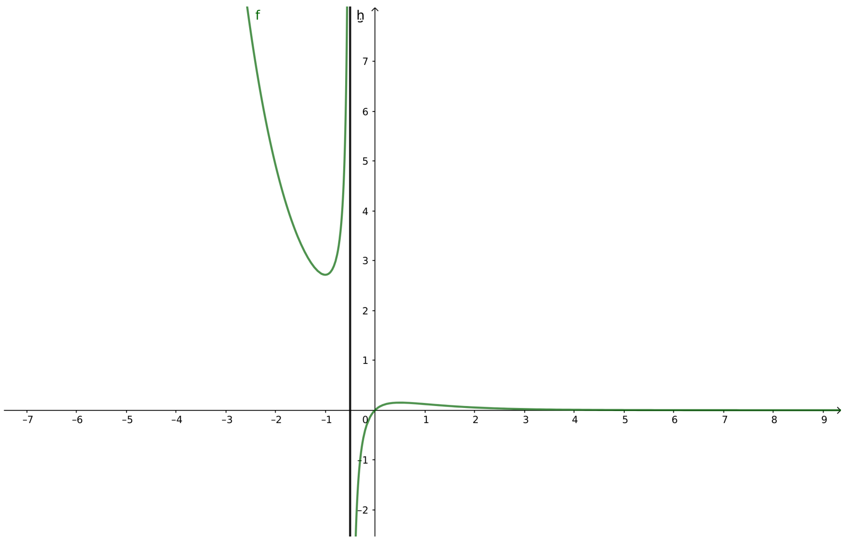
   Men när $x \to +\infty$ gäller $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$, så x-axeln är en vågrät asymptot då $x \to +\infty$.

   Derivering ger
$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}\frac{x}{2x+1} + e^{-x}\frac{2x+1-2x}{(2x+1)^2} = -e^{-x}\frac{x(2x+1)-1}{(2x+1)^2} \\ &= -e^{-x}\frac{(2x^2+x-1)}{(2x+1)^2} = -e^{-x}\frac{(x+1)(2x-1)}{(2x+1)^2} \ . \end{aligned}$$

   Vi får följande teckentabell:

x		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$- - --$	0	$+ + ++$	ej def.	$+ + ++$	0	$- - --$
$f(x)$	$\searrow$	e min	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	$\frac{1}{4\sqrt{e}}$ max	$\searrow$

Skiss:



7. Vi löser först den homogena ekvationen $y_h'' - y_h = 0$. Den har den karakteristiska ekvationen $r^2 - 1 = 0$ med rötterna ± 1. Så $y_h(x) = Ae^x + Be^{-x}$.

   Eftersom e^{-x} ingår i homogenlösningen ansätter vi partikulärlösningen $y_p = Cxe^{-x}$. Derivering ger $y_p' = Ce^{-x}(1-x)$ och $y_p'' = Ce^{-x}(x-2)$. Detta ger $Ce^{-x}(x-2-x) = e^{-x}$, så $C = -\frac{1}{2}$. Alltså gäller $y_p = -\frac{1}{2}xe^{-x}$.

   Den allmänna lösningen är alltså $y(x) = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x}$.

   Derivering ger $y'(x) = Ae^x - Be^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x}(x-1)$. Sätter vi $x = 0$ ger begynnelsevillkoren

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}, \begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ och } \begin{cases} A = \frac{5}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

   Så lösningen är $y(x) = \frac{5}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} = \frac{1}{4}\left(5e^x - (2x+1)e^{-x}\right)$.

8. (a) Sätter vi $x = 1$ och $y = f(1)$ i ekvationen

$$(f(x))^3 + f(x) - 2x^3 = 0 \tag{1}$$

   får vi $y^3 + y - 2 = 0$ som har roten $y = 1$. Faktorisering ger $y^3 + y - 2 = (y-1)(y^2+2y+2)$. Eftersom $y^2+2y+2 = (y+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0$ är $y = 1$ den enda (reella) roten och alltså är $f(1) = 1$.

   Derivering av (1) ger

$$3f^2(x)f'(x) + f'(x) - 6x^2 = 0\,. \tag{2}$$

Sätter vi $x = 1$ (och utnyttjar att $f(1) = 1$), får vi $4f'(1) = 6$ och $f'(1) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

(b) Vi löser ut $f'(x)$ ur (2) och får

$$f'(x) = \frac{6x^2}{1 + 3f^2(x)} \geq 0 ,$$

med strikt olikhet utom då $x = 0$. Alltså är $f(x)$ strängt växande.

(c) Derivering av $f^{-1}(f(x)) = x$ ger med hjälp av kedjeregeln att $(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$. Sätter vi $x = 1$ och använder (a), får vi $(f^{-1})'(1)\frac{3}{2} = 1$ och $(f^{-1})'(1) = \frac{2}{3}$.