# Förslag till lösningar,

Analys TMV170/MMGD30 27 augusti 2019,

1. (a)&(c) Se kurslitteraturen.
   (b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

   enligt (a).

2.
   (a)
   Eftersom $x^3+3x^2-4=(x-1)(x^2+4x+4)$ och $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ är

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-4}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x+4}{x+3}=\frac{9}{4}\ .$$

   (b)

$$\sqrt{x^2+x}-x=\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\to\frac{1}{2},x\to\infty\ .$$

3.

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx=\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{x},x=t^2,dx=2tdt\\ 0\mapsto 0,4\mapsto 2\end{array}\right]=2\int_0^2 te^t dt$$
$$=\left(\begin{array}{l}\text{partiell}\\ \text{integration}\end{array}\right)=2\left(\left[te^t\right]_0^2-\int_0^2 e^t dt\right)$$
$$=2\left(2e^2-\left[e^t\right]_0^2\right)=2(e^2+1)\ .$$

4. Den homogena ekvationen $y_h''+4y_h'+4y_h = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2+4r+4 = 0$ med dubbelroten $r = -2$. Så homogenlösningen är

$$y_h(x) = (Ax + B)e^{-2x} \; .$$

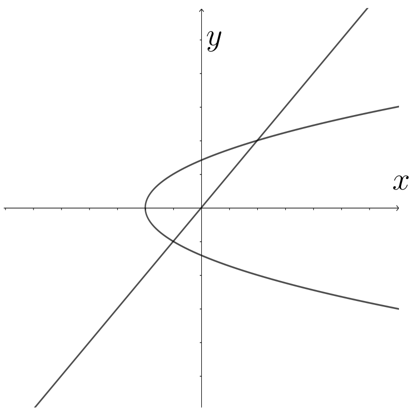
För att bestämma en partikulärlösning till $y_p''+4y_p'+4y_p = e^{-x}$ ansätter vi $y_p(x) = Ce^{-x}$. Vi får $y_p''+4y_p'+4y_p = Ce^{-x}$. Så $C = 1$ och $y_p(x) = e^{-x}$. Den allmänna lösningen är

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax + B)e^{-2x} + e^{-x} \; .$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger $B + 1 = 0$ så $B = -1$. Vi får $y(x) = (Ax-1))e^{-2x}+e^{-x}$ och $y'(x) = (A-2(Ax-1))e^{-2x}-e^{-x}$. Så villkoret $y'(0) = 0$ ger $A + 2 - 1 = 0$ och alltså är också $A = -1$. Den sökta lösningen är alltså

$$y(x) = -(x + 1)e^{-2x} + e^{-x} \; .$$

5. Skärningspunkterna mellan kurvorna ges av ekvationen $x = x^2 - 2$ med rötterna $x = -1$ och $x = 2$.




Arean av den del där $-2 \leq x \leq -1$ är

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{-1} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+2}\, dx = \text{(symmetri)} \\ &= 2\int_{-2}^{-1} \sqrt{x+2}dx = 2\left[\frac{2}{3}(x+2)^{3/2}\right]_{-2}^{-1} = \frac{4}{3} \; . \end{aligned}$$

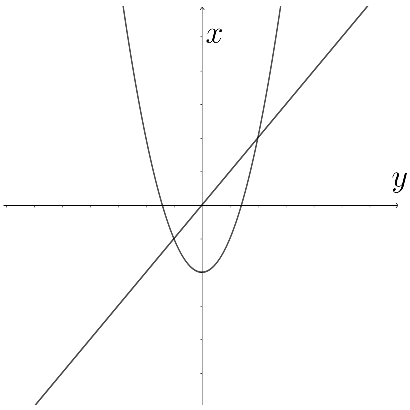
För den del där $-1 \leq x \leq 2$ är arean

$$A_2 = \int_{-1}^{2} \sqrt{x+2} - x \, dx = \left[ \frac{2}{3}(x+2)^{3/2} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{2}$$
$$= \frac{2}{3}(8-1) - (2 - \frac{1}{2}) = \ldots = \frac{19}{6} \, .$$

Så den sökta arean är

$$A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \, .$$

Ett annat (och nog enklare) sätt att lösa uppgiften är att låta $x$ och $y$ byta roll som i följande figur.




Nu får vi arean

$$A = \int_{-1}^{2} y - (y^2 - 2) dy = \left[ \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 2y \right]_{-1}^{2} = \ldots = \frac{9}{2} \, .$$

6. Vi observerar att $f(x) > 0$ då $x \geq 0$, $f(0) = 1$ och att, på grund av det snabba avtagandet hos $e^{-x}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

   Derivering ger $f'(x) = e^{-x}(2 - (2x+1)) = e^{-x}(1-2x)$. Så $f(x) = 0$ endast då $x = \frac{1}{2}$. Vi har $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{e}}$. Eftersom $e < 4$ gäller

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{e}} > \frac{2}{\sqrt{4}} = 1 = f(0) \, .$$

Det följer (Hur då?) att $f(x)$ har det största värdet $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{e}}$ och minsta värde saknas.

7. Eftersom $D(\cos x\ y(x)) = \cos x\ y'(x) - \sin x\ y(x)$, kan ekvationen skrivas

$$(\cos x\ y(x))' = \sin x\ . \qquad (1)$$

(Om du följer standardmetoden; dividerar med $\cos x$, observerar att $\int -\sin x/\cos x\ dx = \ln\cos x$, så den integrerande faktorn är $\exp(\ln\cos x) = \cos x$, får du efter multiplikation med $\cos x$ formeln (1).) Integration av (1) ger

$$\cos x\ y(x) = \int \sin x\ dx = -\cos x + C\ .$$

Villkoret $y(0) = 0$ ger $0 = -1 + C$ så $C = 1$. Division med $\cos x$ ger den sökta lösningen

$$y(x) = \frac{1}{\cos x} - 1\ .$$

8. Låt $\tilde{F}(x) = x\int_x^1 \frac{1}{t^2}dt$. Då gäller

$$\tilde{F}(x) = x\left[-\frac{1}{t}\right]_x^1 = x\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 1 - x \to 1, x \to 0\ .$$

Desutom har vi

$$F(x) - \tilde{F}(x) = x\int_x^1 \frac{\cos t - 1}{t^2}dt\ .$$

Integralen $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t^2}dt$ existerar $\big($den är inte generaliserad, (t.ex. på grund av uppgift 1(b))$\big)$. Så

$$\lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{\cos t - 1}{t^2}dt = \int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t^2}dt = I \in \mathbb{R}\ ,$$

och

$$\lim_{x\to 0}(F(x) - \tilde{F}(x)) = \lim_{x\to 0} x\int_x^1 \frac{\cos t - 1}{t^2}dt = 0 \cdot I = 0\ .$$

Slutligen får vi

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\tilde{F}(x) + \lim_{x\to 0}(F(x) - \tilde{F}(x)) = 1 + 0 = 1\ .$$