MATEMATIK **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2005-08-20 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: : Elin G/Elizabeth W tel 0762-721860/0762-721861

Linjär Algebra TD1 (TMV 185))

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.
Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
Lösningar beräknas finnas på kursens webbsida första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Rättningsprotokoll anslås på Matematiskt Centrum ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Tid för granskning meddelas via epost då rättningen är klar.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

   (a) Vektorerna (2p)
   $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^t$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^t$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^t$ och $\boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}^t$ är givna i $\boldsymbol{R}^4$.
   Vilken/vilka av vektorerna $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ är ortogonal(a) mot $\boldsymbol{v}_4$?

   (b) Vad är determinanten för matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$? (3p)

   (c) Vektorn $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}^t$ är egenvektor till matrisen $\begin{bmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.
   Vad är motsvarande egenvärde? (2p)

   (d) Ange ekvationen på parameterform för den linje som går genom punkten [1,0,3] och är ortogonal mot planet $4x - y = 5$. (Koordinater i ON-bas.) (3p)

   (e) Två vektorer i $\mathbb{R}^n$ är inmatade som kolonnmatriser a och b i MATLAB. Vilka av följande beräkningar ger skalärprodukten mellan de två vektorerna?
   1. `>> x=a'*b`
   2. `>> x=a*b'`
   3. `>> x=a.*b`
   4. `>> x=sum(a.*b)`
   5. `>> x=0;for k=1:n; x=x+a(k)*b(k);end` (2p)

   (f) En linjär avbildning $\boldsymbol{F}$ från $\boldsymbol{R}^2$ till $\boldsymbol{R}^3$ avbildar $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^t$ på $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}^t$ och $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^t$ på $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$. Ange avbildningsmatrisen för $\boldsymbol{F}$. (2p)

Till uppgifter 2 – 5 skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Lös matrisekvationen $XA = B + 2X$, där (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 12 & 13 & 3 \end{bmatrix}.$$

Var god vänd!

3. Bestäm, för varje värde på parametern α, rangen till matrisen (6p)

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Ange vilken typ av kurva följande ekvation beskriver (6p)

$$3y^2 + 4xy = 4$$

Skissa också i grova drag kurvan (markera särskilt nya koordinataxlar).

5. Låt (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrisen A ovan har egenvärdena -2 och 2. Bestäm en ON-bas av egenvektorer till A.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

Låt A vara en 5×4-matris.

(a) Om ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har lösning för något $\boldsymbol{b}$ så har det lösning för alla $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^5$.

(b) Om $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har entydig lösning så har $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ entydig lösning för alla $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^5$.

(c) Om $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har entydig lösning så har $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ högst en lösning om $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^5$.

Låt A vara en $n \times n$-matris.

(d) Om ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har lösning för något $\boldsymbol{b}$ så har det lösning för alla $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

(e) Om $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har entydig lösning så har $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ entydig lösning för alla $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

(f) Om $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ saknar lösning för något $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ så har $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ parameterlösning.

7. (a) Definiera vad som menas med att en mängd vektorer i ett vektorrum är linjärt oberoende. (1p)

(b) Ett resultat i boken säger att om man har en mängd bestående av egenvektorer till en matris, vilka svarar mot olika egenvärden, så är mängden linjärt oberoende. Genomför beviset i specialfallet då antalet vektorer är tre. (5p)

Lycka till!
Carl-Henrik