

## Diskret matematik IT ht 2004: Extra övningsuppgifter

1. Visa att det för alla positiva heltal  $n$  gäller att

$$1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

2. Visa att

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2.$$

3. Visa att

$$\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

4. Visa att  $n^2 > 2n + 1$  för alla heltal  $n \geq 3$ .
5. Visa att  $7|13^n - 6^n$  för alla positiva heltal  $n$ .
6. Visa att  $3|n^3 + 2n$  för alla positiva heltal  $n$ .
7. Visa att

$$\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{n^2}$$

för alla heltal  $n \geq 2$ .

8. Låt  $a, b, c$  och  $d$  vara fyra heltal sådana att  $a|b$  och  $c|d$ . Visa att  $ac|bd$ .
9. Visa att om  $a$  är ett heltal sådant att  $2|a^2$  så gäller också att  $4|a^2$ .
10. Låt  $p$  vara ett primtal. Visa att om  $2 \leq k \leq p$  så är  $p! + k$  inte ett primtal.
11. Låt  $n \geq 5$  vara ett udda heltal. Förklara varför de tre talen  $n, n + 2$  och  $n + 4$  inte alla kan vara primtal.
12. Beräkna  $[146]^2$  i  $\mathbf{z}_{21}$ .
13. Ge ett exempel som visar att det inte nödvändigtvis är sant att om  $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$  så är  $a \equiv b \pmod{n}$ .