Matematik Chalmers

Tentamen i tma245 Matematik IT den 23 oktober 2003, kl. 8.45-12.45

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Anton Evgrafov, tel. 0740-450922

1. (6p) Vilka av följande utsagor är sanna för alla mängder A, B, C och D?
   (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
   (b) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,
   (c) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

2. (6p) Betrakta den diofantiska ekvationen
$$ax + by = c$$
där a, b och c är kända heltal.
   (a) Antag att $sgd(a, b)$ ej delar c. Varför kan ekvationen då inte ha någon lösning?
   (b) Antag att $sgd(a, b) = 1$. Då är ekvationen lösbar. Ange en metod för att finna en lösning.
   (c) Antag att (x_0, y_0) är en lösning och att n är ett heltal. Visa att även $(x_0 - bn, y_0 + an)$ är en lösning.

3. (6p) Antag att ett slumpförsök har utfallsrummet U och sannolikhetsmåttet P. Som bekant gäller följande räkneregler:
   (1) För alla A gäller att $P(A) \geq 0$,
   (2) $P(U) = 1$, $P(\emptyset) = 0$,
   (3) om A och B är disjunkta gäller att $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

   Använd dessa räkneregler till att visa att
   (a) om $A \subseteq B$ gäller att $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
   (b) för alla A gäller att $P(A^c) = 1 - P(A)$,
   (c) för alla A och B gäller att $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

4. (6p) De två handbollslagen a och b ska mötas i en matchserie om bäst av n matcher, där n är ett udda heltal. En match mellan a och b slutar, oberoende av andra matchers utgång, med seger för a med sannolikheten $3/4$. Hur stort måste n väljas för att sannolikheten att a står som slutsegrare skall överstiga 0.9?

5. (6p) Funktionen $f : [0, 1] \to B$ given av
$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$
är surjektiv. Ange B. Visa vidare att f även är injektiv och beräkna dess invers.

6. (6p) Oberoende för tre händelser: Om A, B och C är tre händelser till ett slumpförsök kan det ibland gälla att de tre händelserna är parvis oberoende (dvs A och B är oberoende, A och C är oberoende och B och C är oberoende) men det är ändå inte rimligt att kalla dem oberoende då $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$.

   (a) Visa att följande är en situation av den typ som just beskrivits: Kasta två symmetriska tärningar, en röd och en blå, och låt A vara händelsen att den röda tärningen visar en sexa, B vara händelsen att den blå tärningen visar en sexa och C vara händelsen att summan av de två tärningsutslagen är 7.

   (b) För att kalla tre händelser oberoende kräver man alltså, förutom parvis oberoende, att $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$. Visa att om A, B och C är parvis oberoende och $P(C|A \cap B) = P(C)$ så är de tre händelserna oberoende.

7. (8p) Betrakta en mängd V med n element.

   (a) För ett positivt heltal $k \leq \binom{n}{2}$, hur många grafer med V som nodmängd och med k kanter kan man bilda? (Kom ihåg att en *graf* saknar öglor och multipla kanter.)

   (b) På hur många sätt kan man bilda en fullständig bipartit graf med V som nodmängd?

   (c) På hur många sätt kan man bilda en n-väg med V som nodmängd?

   (d) På hur många sätt kan man bilda en n-cykel med V som nodmängd?

8. (6p) För vilka heltal n gäller att

$$21|n^8 - 7n^5 + 6n^3 + 4?$$

/Johan Jonasson

Lösningar

1. (a) Sant, ty för ett godtyckligt element x gäller att $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   (b) Sant ty $(x, y) \in (A \times B) \cap (B \times C)$ är ekvivalent med att $x \in A \wedge y \in B \wedge x \in C \wedge y \in D$, dvs $x \in A \cap C \wedge y \in B \cap D$, dvs $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

   (c) Ej sant. Ett motexempel ges av $A = C = \{0\}$ och $B = D = \{1\}$.

2. (a) Om det finns en lösning (x, y) finns det alltså heltal x och y så att $ax + by = c$. Eftersom $sgd(a, b)$ delar såväl a som b måste $sgd(a, b)$ dela vänsterledet i denna ekvation och därmed, förstås, äevn högerledet, dvs c.

(b) Använd Euklides utökade algoritm till att finna heltal u och v så att $au + bv = 1$ och multiplicera sedan detta uttryck med c för att få $acu + bcv = c$. Man har då funnit lösningen $(x, y) = (cu, cv)$.

(c) Eftersom $ax_0 + by_0 = c$ gäller att $a(x_0 - bn) + b(y_0 + an) = ax_0 + by_0 - abn + ban = ax_0 + by_0 = c$.

3. (a) Enligt (3) gäller att $P(B) = P(B \setminus A) + P(A)$ ur vilket (a) följer.

   (b) Enligt (a) gäller att $P(A^c) = P(U \setminus A) = P(U) - P(A) = 1 - P(A)$ där den sista likheten följer av (2).

   (c) Enligt (3) gäller att $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B))$ och enligt (a) gäller att den sista termen är $P(B) - P(A \cap B)$.

4. Även om matchserien skulle ta slut innan alla n matcherna spelats kan vi anta att även de sista matcherna faktiskt spelas, då ju deras resultat inte kan ändra slutresultatet. Låt X vara entalet matcher som b vinner. Då bli X binomialfördelad med parametrar n och $1/4$. Sannolikheten att a vinner matchserien är då sannolikheten att $X \leq (n-1)/2$ och vi vill finna det minsta n sådant att denna sannolikhet överstiger 0.9. Uppenbarligen räcker det inte med $n = 1$ och ett snabbt överslag ger att inte heller $n = 3$ duger. Vi prövar med $n = 5$:

$$P(X \leq 2) = (\frac{3}{4})^5 + 5(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^4 + 10(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^3 = \frac{916}{1024}.$$

   Detta duger inte riktigt heller, varför man får ta till med $n = 7$ och man ser snabbt att i detta fall blir $P(X \leq 3) > 0.9$. Svaret blir alltså $n = 7$.

5. Det gäller att $B = [0, 1]$ ty ekvationen $y = f(x)$, dvs $y = \sqrt{1 - x^2}$ har lösning $x \in [0, 1]$ om och endast om $y \in [0, 1]$. Injektiviteten följar av att om $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - y^2}$ gäller $x^2 = y^2$ och eftersom endast ickenegativa x och y är aktuella får man $x = y$. Inversen fås av att lösa ekvationen ovan. Man får $x = \sqrt{1 - y^2}$, så att $f^{-1}(y) = \sqrt{1 - y^2}$. (Dvs i detta fall gäller $f = f^{-1}$.)

6. Alla de tre händelserna har sannolikheten $1/6$. Att A och B är oberoende är från situationen givet. Oberoendet mellan A och C följer av att händelsen $A \cap C$ endast består av utfallet där den röda tärningen visar en sexa och den blå träningen en etta, och därmed har sannolikheten $1/36$ som önskat. Att visa att B och C är oberoende är helt analogt. De tre händelserna är inte oberoende eftersom $A \cap B \cap C = \emptyset$.

   För del (b):

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B)P(A \cap B) = P(C)P(A)P(B)$$

   som önskat.

7. (a) Antalet grafer sammanfaller med antalet sätt att välja ut k stycken bland alla de $\binom{n}{2}$ paren av element man kan bilda från V. Svaret blir således

$$\binom{\binom{n}{2}}{k}.$$

(b) Här handlar det om på hur många sätt de n noderna kan delas in i två grupper, låt oss kalla dem “de röda noderna” och “de blå noderna”. För varje nod finns det två alternativ, blå eller röd, så enligt multiplikationsprincipen finns det 2^n olika sätt att dela in noderna i röda och blå noder. Dock gäller det att varje fullständig bipartit graf kan upppkomma från precis två sådana uppdelningar, som fås från varandra genom att kalla alla blå noder röda och vice versa. Således är antalet fullständiga bipartita grafer 2^{n-1}.

(c) Varje n-väg svarar mot precis en permutation av de n noderna varför det finns precis $n!$ stycken n-vägar.

(d) Varje n-cykel svarar precis n stycken n-vägar (ty det finns precis n ställen där en cykel kan “klippas av” och bilda en väg), varför svaret blir $n!/n = (n-1)!$.

8. Kalla högerledet $f(n)$, dvs $f(n) = n^8 - 7n^5 + 6n^3 + 4$. Eftersom 21 kan skrivas som produkten av de två primtalen 3 och 7 gäller att $21|f(n)$ om och endast om $3|f(n)$ och $7|f(n)$, dvs om $f(n) \equiv 0$ modulo 3 såväl som modulo 7.

Vid räkning i $\mathbf{Z}_7$ gäller att $f(n) = n^8 + 6n^3 + 4 = n^2 - n^3 + 4$ (ty $n^6 = 1$ enligt Eulers sats) så:

$$\begin{aligned} f(0) &= 4 \\ f(1) &= 4 \\ f(2) &= 4 - 8 + 4 = 0 \\ f(3) &= 2 - 6 + 4 = 0 \\ f(4) &= 1 - 1 + 4 = 4 \\ f(5) &= 4 - 6 + 4 = 2 \\ f(6) &= 1 - 6 + 4 = 6. \end{aligned}$$

Vi ser att $f(n) \equiv 0 \bmod 7$ om och endast om $n \equiv 2$ eller $n \equiv 3 \bmod 7$. Vid räkning i $\mathbf{Z}_3$ gäller att $f(n) = 1 - n^5 + 4 = 5 - n = 2 - n$ varför $f(n) \equiv 0 \bmod 3$ om och endast om $n \equiv 2 \bmod 3$. Sammantaget gäller alltså att $21|f(n)$ då

$$\begin{cases} n \equiv 2 \bmod 3 \\ n \equiv 2 \bmod 7 \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} n \equiv 2 \bmod 3 \\ n \equiv 3 \bmod 7 \end{cases}$$

En lösning till det över ekvationssystemet är $n = 2$ så enligt kinesiska restsatsen gäller att den allmänna lösningen är $n = 2 + 21m$, $m \in \mathbf{Z}$. Till det andra ekvationssystemet är $n = 17$ en lösning så den allmänna lösningen är $n = 17 + 21m$, $m \in \mathbf{Z}$. De n vi söker är alltså de n som kan skrivas som $2 + 21m$ eller $17 + 21m$ där m är något heltal.