Matematik Chalmers

Tentamen i tma245 Matematik IT, del A, den 16 januari 2004, kl. 14.15-18.15

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Jonas Hartwig/Mikael Persson, tel. 0740-450922

1. (6p) Låt a, b och c vara heltal.
   (a) Vad betyder det att $a|b$?
   (b) Visa att $a|b$ och $a|c$ om och endast om $a|mb+nc$ för alla heltal m och n.

2. (6p) Låt A, B och C vara mängder. Bevisa eller ge motexempel till följande påståenden.
   (a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,
   (b) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$,
   (c) $A \setminus B = B \setminus A$.

3. (6p) Ge exempel på en funktion $f : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$ som är
   (a) bijektiv,
   (b) varken surjektiv eller injektiv.

   Förklara också varför det i just detta fall gäller att f är injektiv om och endast om f är surjektiv.

4. (6p) En graf G har noderna a, b, c och d. Vilka kanter G har bestäms av slumpen på så sätt att var och en av de sex möjliga kanterna $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ och $\{c, d\}$ finns med i grafen med sannolikhet 1/2 oberoende av vilka andra kanter som finns med. Vad är sannolikheten att
   (a) Det finna en väg mellan a och b?
   (b) G är sammanhängande?
   (c) G är ett träd?

5. (8p) Betrakta predikatet $Q(x, y, z) : x^2 + y^2 \geq z^2$. Vilka av följande utsagor är sanna? (I samtliga fall är det mängden av reella tal som är universum för kvantorerna.) Glöm inte att ordentligt motivera dina svar.

(a) $\forall x : \forall y : \forall z : Q(x, y, z)$,
(b) $\forall x : \forall y : \exists z : Q(x, y, z)$,
(c) $\exists x : \exists y : \forall z : Q(x, y, z)$,
(d) $\forall z : \exists y : \exists x : Q(x, y, z)$,
(e) $\forall y : \forall z : \exists x : Q(x, y, z)$.

6. (6p) Pelle och Lisa köpte marsipangrisar och chokladaskar för 29 respektive 37 kronor styck. Pelle spenderade 533 kronor på detta medan Lisa gjorde av med 491 kronor. Vem köpte flest chokladaskar?

7. (6p)

   (a) Antag att n olika bollar ska fördelas på tre urnor på så sätt att i de tre urnorna ska det finnas k, l respektive m bollar (där, förstås, $k + l + m = n$). På hur många sätt kan detta ske?

   (b) Låt $a, b, c \in \mathbb{R}$ och $n \in \mathbb{Z}_+$. Som bekant säger binomialsatsen att

   $$(a + b)^n = \sum_{(k,l):k+l=n} \binom{n}{k} a^k b^l.$$

   På liknande sätt gäller att

   $$(a + b + c)^n = \sum_{(k,l,m):k+l+m=n} A(k, l, m) a^k b^l c^m.$$

   Vad är $A(k, l, m)$?

8. (6p) Enligt Eulers sats gäller att om a och n är relativt prima positiva heltal så är

   $$a^{1+\Phi(n)} \equiv a \bmod n.$$

   Faktum är att om $n = pq$ där p och q är två olika primtal kan man slopa kravet att a och n är relativt prima; den givna kongruensen gäller ändå. Bevisa detta.

/Johan Jonasson

Lösningar

1. (a) Att $b = na$ för något heltal n. (b) Om $a|b$ och $a|c$ betyder detta enligt (a) att $b = ka$ och $c = la$ för två heltal k och l, varför det gäller för alla heltal m och n att $mb + nc = mka + nla = (mk + nl)a$, dvs $a|mb+nc$. Åt andra hållet: Sätt $m = 0, n = 1$ respektive $m = 0, n = 1$.

2. Påstående (a) är sant ty för ett godtyckligt element x gäller att $x \in A \cap (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

   Påstående (b) är falskt och ett motexempel är $A = B = C = \{1\}$. Påstående (c) är självklart falskt, och spricker så fort A och B är olika.

3. En bijektiv funktion är till exempel $f(x) = x$, medan en som varken är injektiv eller surjektiv är ges av $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Om en funktion med denna målmängd och denna definitionsmängd inte är injektiv finns det $x \neq y$ sådana att $f(x) = f(y)$. Eftersom det bara finns tre element i definitionsmängden kan funktionen i så fall bara anta högst två olika värden, dvs $|V_f| \leq 2$. Men målmängden innehåller ju också tre element och därför kan f inte heller vara surjektiv. Å andra sidan om f är injektiv avbildas 0,1 och 2 på olika punkter varför värdemängden måste bli hela målmängden, dvs f är surjektiv.

4. Det finns $2^6 = 64$ olika tänkbara utfall och enligt uppgift är de alla lika sannolika. Därför handlar varje deluppgift om att avgöra hur många av de 64 tänkbara utfallen för vilka den händelse för vilken sannolikheten efterfrågas inträffar.

   Det är lättast att börja med (c). Ett träd är en sammanhängande graf utan cykler så ett träd på fyra noder måste innehålla precis tre kanter och dessutom vara sammanhängande. Det finns $\binom{6}{3} = 20$ utfall med precis tre kanter och av dessa är det endast de fyra varianterna som innehåller en triangel som inte är sammanhängande. Sannolikheten att få ett träd är alltså $16/64 = 1/4$.

   De sammanhängande graferna är, förutom de redan nämnda 16 träden, alla grafer med 4, 5 eller 6 kanter. Dessa är $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 22$ stycken så att sannolikheten att få en sammahängande graf är $(22 + 16)/64 = 19/32$.

   En väg mellan a och b finns det, förutom i alla sammanhängande grafer, i två av de fyra graferna med tre kanter som bildar en triangel, fem grafer med två kanter och en graf med en kant, totalt $38+2+5+1 = 46$ stycken. Den sökta sannolikheten är alltså $46/64 = 23/32$.

5. Del (a) är falsk, tag till exempel $x = y = 0$ och $z = 1$. Del (b) är sann ty hur man än väljer x och y gäller att $x^2 + y^2 \geq 0$ så det fungerar fint att välja $z = 0$.

   Del (c) är falsk, ty vad man än väljer att sätta x och y till finns alltid ett z som är för stort, till exempel $z = |x| + |y|$. Del (d) är sann, vad z än är kan man till exempel välja $x = y = z$.

Del (e) är sann, välj till exempel $x = z$.

6. Låt x_P och y_P vara antalet marsipangrisar respektive chokladaskar som Pelle köpte och låt x_L och y_L vara motsvarande storheter för Lisa. Vi får de två dioofantiska ekvationerna:

$$29x_P + 37y_P = 533$$

och

$$29x_L + 37y_L = 491.$$

Eftersom $sgd(29, 37) = 1$ är de två ekvationerna lösbara. Med hjälp av Euklides utökade algoritm finner man att ekvationen $29x + 37y = 1$ här en lösning $(-14, 11)$ så att en lösning till Pelles ekvation blir $(-14 \cdot 533, 11 \cdot 533) = (-7462, 5863)$ och till Lisas $(-14 \cdot 491, 11 \cdot 491) = (-6874, 5401)$. De allmänna lösningarna blir då $(-7462 + 37n, 5863 - 29n)$ respektive $(-6874 + 37n, 5401 - 29n)$ där n är ett godtyckligt heltal. I Pelles fall är det enda tänkbara svaret med positiva storheter $(x_p, y_P) = (12, 5)$ och för Lisa $(x_L, y_L) = (8, 7)$, ur vilket vi ser att Lisa köpte flest chokladaskar.

7. Först väljer vi ut bollar till urna 1. Detta kan ske på $\binom{n}{k}$ olika sätt. Bland de återstående $n - k$ bollarna väljs sedan l bollar ut till urna 2. Detta kan ske på $\binom{n-k}{l}$ olika sätt. Till sist finns det bara ett val; att lägga de återstånde $n - k - l = m$ bollarna i urna 3. Enligt multiplikationsprincipen finns totalt

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l} = \frac{n!}{k!l!m!}$$

sätt att placera ut bollarna.

I del (b) handlar det om att inse att faktorn $A(k, l, m)$ är antalet sätt att välja ut k parenteser att plocka a ut, l parenteser att plocka b ur och m parenteser att plocka c ur. Genom att assciera a med urna 1, b med urna 2 och c med urna 3 i uppgift (a) inser man att $A(k, l, m)$ blir just svaret i (a).

8. Vi behöver bara visa satsen för $a \in \{0, 1, 2, \ldots, pq - 1\}$. Fallet $a = 0$ är trivialt så det fallet kan vi också undanta i fortsättningen.

Den påstådda kongruensen gäller enligt Eulers sats för alla a som inte är en multipel av p eller q, så antag först att $a = kp$ för något heltal k. Observera att $1 \leq k \leq q-1$ varför k och q är relativt prima så att även kp och q är relativt prima. Eftersom $\Phi(pq) = \Phi(p)\Phi(q)$ och $(kp)^{\Phi(q)} = 1 + rq$ för något heltal r enligt Eulers sats, gäller

$$\begin{aligned} a^{1+\Phi(n)} = kp(kp)^{\Phi(p)\Phi(q)} &= kp((kp)^{\Phi(q)})^{\Phi(p)} \\ &= kp(1+rq)^{\Phi(p)}. \end{aligned}$$

Om man utvecklar det sista uttrycket kommer alla termer utom kp-termen att innehålla en faktor pq, varför hela uttrycket blir just kp modulo pq, som önskat. Fallen då a istället är en multipal av q behandlas analogt, med p och q i ombytta roller.