Matematik Chalmers

**Tentamen i TMV210 och MAD100 Diskret matematik den 11 januari 2005, kl. 8.30-12.30**

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: xxx, tel. 0739-779268

1. (6p) Beskriv Euklides utökade algoritm för att till två heltal $a$ och $b$ finna $sgd(a, b)$ och två heltal $u$ och $v$ sådana att $au+bv = sgd(a, b)$. Förklara varför algoritmen fungerar.

2. (6p) Ge fullständig lösning till den diofantiska ekvationen
$$28x + 36y = 100.$$
Ange också inversen till 7 i $\mathbf{Z}_9$.

3. (6p) Ungefär 1500 enkronor staplas på ett bord. När de läggs i högar om 10 mynt blir det 7 mynt över och när de läggs i högar om 21 mynt blir det 2 mynt över. Hur många mynt är det totalt?

4. (7p) Följden $f_0, f_1, f_2, \ldots$ är given av att $f_0 = 1$, $f_1 = 2$ och för $n \geq 2$: $f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2}$. Det finns ett enkelt explicit uttryck för $f_n$. Finn detta uttryck och bevisa dess riktighet.

5. (7p)
   (a) Rita en graf med 6 noder där alla noder har gradtal 4. Finns det en Eyuler-cykel i denna graf? Ange i så fall denna genom att sätta namn på noderna och ange i vilken ordning de passeras.
   (b) Varför är det omöjligt att rita en graf med 7 noder där alla noder har gradtal 3?

6. (6p) Låt $U$ vara en icketom mängd och låt $F$ vara familjen av alla delmängder till $U$. Relationen $\sim$ på $F$ är given av att $A \sim B$ då $A \subseteq B$. Är relationen $\sim$ en ekvivalensrelation? Är $\sim$ en partiell ordning?

7. (6p) Visa att antalet följder av längd $n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, av nollor och ettor, som innehållar ett udda antal ettor är $2^{n-1}$.

8. (6p) Finns det några heltal $n$ sådana att
$$\frac{10^n - 1}{9^n - 1}$$
är ett heltal? Motivera ditt svar.

/Johan Jonasson

**Lösningar**

1. Antag att $a > b$. Skriv med hjälp av divisionsalgoritmen $a = q_1 b + r_1$. Upprepa med $b$ och $r_1$ och få $b = q_2 r_1 + r_2$. Forsätt på detta sätt genom att dividera den förra resten med den nya resten: $r_1 = q_3 r_2 + r_3$, $r_2 = q_4 r_3 + r_4$, etc, ända tills du får en rest som är 0. Då är $sdg(a, b)$ den sista nollskilda resten.

   Algoritmen fungerar för att det i varje steg, $k$, gäller att $sgd(r_{k-1}, r_k) = sgd(q_{k+1} r_k + r_{k+1}, r_k) = sgd(r_{k+1}, r_k)$.

2. Om man förkortar ekvationen så långt det går får man

   $$7x + 9y = 25.$$

   Eftersom $sgd(7, 9) = 1$ är ekvationen lösbar. Genom inspektion ser man att till exempel $(x, y) = (1, 2)$ är en lösning, så den allmänna lösningen ges av $(x, y) = (1 + 9n, 2 - 7n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

   Inversen till 7 i $\mathbf{Z}_9$ är 4 ty $7 \cdot 4 = 28 \equiv 1$ mod 9.

3. Vi vill hitta ett heltal $x$ som är kongruent med 7 modulo 10 och kongruent med 2 modulo 21. Det första villkoret säger oss att $x = 7 + 10k$ för något heltal $k$. Därför ger det andra villkoret att $7 + 10k = 2$ i $\mathbf{Z}_{21}$, dvs $10k = -5$ i $Z_{21}$. Inversen till $10$ i $Z_{21}$ är -2, så vi får $k = 10$ och därmed $k = 10 + 21m$ för ett godtyckligt heltal $m$. Den allmänna lösningen blir alltså $x = 7+10(10+21m) = 107 + 210m$, $m \in \mathbf{Z}$. Den lösning som ligger närmast 1500 är 1577, så det var alltså totalt 1577 enkronor det rörde sig om.

4. Det gäller att $f_n = 2^n$. För att visa detta använder vi induktion: Påståendet är uppenbarligen sant för $n = 1$ och $n = 2$, så antag att det är sant då $n = 1, 2, \ldots, m - 1$ för något godtyckligt positivt heltal $m$. Då gäller att

   $$f_m = f_{m-1} + 2f_{m-2} = 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

   Enligt induktionsprincipen är alltså påståendet sant för alla $n$.

5. Man kan till exempel rita en sexhörning med två inskrivna trianglar. En graf där alla noder har gradtal 4 har alltid en Eulercykel ty alla grafer med idel jämna gradtal har en sådan.

   Del (b): Om det skulle finnas en graf med 7 noder där alla noder har gradtal 3, så skulle summan av gradtalen i grafen bli 21, ett udda tal. Men om man summerar gradtalen i en graf så bidrar varje kant i grafen med precis 2 till denna summa varför summan måste bli jämn, en motsägelse.

6. Vi har inte med en ekvivalensrelation att göra ty symmetrin håller inte; det är naturligtvis inte generellt sant $B \subseteq A$ så fort $A \subseteq B$, det räcker ju att $A$ är en äkta delmängd av $B$ för att få ett motexempel mot detta.

   Däremot så är den givna relationen en partiell ordning: För alla $A$ gäller att $A \subseteq A$. Om $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$ så gäller att $A = B$. Slutligen om $A \subseteq B$ och $B \subseteq C$ så gäller alltid att $A \subseteq C$.

7. Använd induktion: Uppgiftens påstående är uppenbart sant då $n = 1$, så antag att det gäller även för $n = m$ där $m$ är ett godtyckligt valt positivt heltal. Antagandet säger att precis hälften av följderna av längd $m$ innehåller ett udda antal ettor. Därför måste också precis hälften av dem innehålla att jämnt antal ettor. Nu är ju antal följder av längd $m+1$ med ett undda antal ettor dels de som börjar med en etta och följs av en följd av längd $m$ med ett jämnt antal ettor, dels de som börjar med en nolla och följs av en följd av längd $m$ med ett undda antal ettor. Summerar vi dessa två antal får vi $2^{m-1} + 2^{m-1} = 2^m$ och det önskade resultatet följer av induktionsprincipen.

8. Svaret är nej, ty nämnaren $9^n - 1$ är jämna och täljaren $10^n - 1$ är udda.