Matematik Chalmers

Tentamen i tmv200 Inledande diskret matematik IT, den 30 mars 2005, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: xxx, tel. 0739-779268

1. (6p) Hur många "ord" kan man bilda av bokstäverna i
   (a) LUVA?
   (b) TELEFON?
   (c) NOLLKOLL?

2. (6p) Visa att det för alla positiva heltal n gäller att
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

3. (7p) Kalle hade varit på en lång resa. När han kom hem räknade han ut att under de dagar han åkt båt, färdats i genomsnitt 720 km/dygn. Övriga dagar hade han färdats i snitt 400 km/dygn. Totalt hade han färdats 15200 km. Hur många dagar hade Kalle varit på resande fot och hur många av dessa hade han åkt båt?

4. (6p) Vad bli koefficienten framför $x^{15}y^8$ i utvecklingen av
$$(x^3-4y^2)^9?$$

5. (6p) avgör vilka av följande två logiska argument som är giltiga:

   (a)
$$\begin{array}{r} p \wedge q \wedge r \to s \\ \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\ p \vee q \to r \\ \neg p \vee r \to q \\ \hline s \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{r} a \text{ är ett heltal} \\ \text{Det finns ett heltal } b \text{ sådant att } sgd(a,b)=2 \\ \hline \frac{a}{2} \text{ är ett heltal.} \end{array}$$

6. (7p) En funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kallas *växande* om det så fort $x<y$ gäller att $f(x)\le f(y)$. Om det för alla sådana x och y dessutom gäller att $f(x)<f(y)$, kallas f *strikt växande*.

(a) Visa att en strikt växande funktion alltid är injektiv.

(b) Get ett exempel på en funktion som är växande, men inte injektiv.

7. (6p) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en bijektiv funktion. Låt följden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara rekursivt definierad genom $a_1 = f(1)$ och då $n \geq 2$,

$$a_n = f(1 + f^{-1}(a_{n-1})).$$

Visa att det för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller att $a_n = f(n)$.

8. (6p) Enligt Eulers sats gäller att om a och n är relativt prima positiva heltal så är

$$a^{1+\Phi(n)} \equiv a \text{ mod } n.$$

Faktum är att om $n = pq$ där p och q är två olika primtal kan man slopa kravet att a och n är relativt prima; den givna kongruensen gäller ändå. Bevisa detta.

/Johan Jonasson

Lösningar

1. I fallet (a) gäller att alla olika val av positioner för de olika bokstäverna ger upphov till olika ord. Där för är svaret $4!$. I fallet (b) är inte alla bokstäver olika; det finns två E'n. Om man räknar som om att de två E'na var olika får man 7! olika ord. För att kompensera för detta dividerar vi med antalet sätt som E'na kan förflyttas inbörder, dvs 2. Svaret blir alltså $7!/2!$. Med samma resonemang som i (b) finner man att svaret i (c) blir $8!/(4!2!)$.

2. När $n = 1$ hävdar den givna formeln att $1 = 1^2$ vilket ju utan tvivel är sant. Antag nu att formeln är korrekt då $n = m$ där m är något godtyckligt men fixerat positivt heltal. I så fall gäller att

$$\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{m}(2k-1) + (2(m+1)-1) = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2.$$

dvs formeln stämmer även då $n = m + 1$. Enligt induktionsprincipen är fomeln sann för alla n, som önskat.

3. Låt x vara antalet dagar som Kalle åkte båt och y antalet övriga resdagar. Enligt uppgift gäller den diofantiska ekvationen

$$720x + 400y = 15200.$$

Genom att förkorta så långt det går kan denna ekvation förenklas till

$$9x + 5y = 190.$$

Eftersom $sgd(5, 9) = 1$ är ekvationen lösbar. Man ser snabbt att $9 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 = 1$, så $9 \cdot (-190) + 5 \cdot 380 = 190$ dvs $(x, y) = (-190, 380)$ är en lösning. Den allmänna lösningen är då

$$(x, y) = (-190 + 5n, 380 - 9n)$$

där n är ett godtyckligt heltal. Enligt problemets natur ska både x och y vara positiva. Dessutom ska $-190 + 5n < 380 - 9n$. Detta ger $n = 39$ eller $n = 40$ och vi får de två möjliga lösningarna $(x, y) = (10, 20)$ och $(x, y) = (5, 29)$. Alltså var Kalle antingen borta i 34 dagar varav fem spendarades på båt, eller så hade Kalle totalt 30 resdagar, varav 10 på båt.

4. Enligt binomialsatsen gäller

$$(x^3 - 4y^2)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (x^3)^{n-k} (-4y^2)^k.$$

Termen för $k = 4$ är en $x^{15}y^8$-term och koefficienten för denna term är $\binom{9}{4}(-4)^4 = 16\binom{9}{4} = 2016$. Svaret är alltså 2016.

5. Det första argumentet är ogiltigt. Ett motexempel är $p = F$, $q = S$, $r = S$, $s = F$; då är alla hypoteser sanna trots att slutsatsen är falsk. Argumentet i (b) är giltigt, ty att $sgd(a, b) = 2$ medför att $2|a$ varför $a/2$ är ett heltal.

6. Del (a): Antag att f är en strikt växande funktion och att $x \neq y$. Då gäller antingen att $x < y$ eller $y < x$. Eftersom f är strikt växande gäller i det första fallet att $f(x) < f(y)$ och i det andra fallet att $f(y) < f(x)$. I bägge fallen gäller att $f(x) \neq f(y)$. Vi har visat att så fort $x \neq y$ gäller att $f(x) \neq f(y)$. Detta är precis vad det betyder att säga att f är injektiv.

   Del (b): Låt till exempel $f(x) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

7. Använd induktion: Att $a_1 = f(1)$ är klart från början, så antag att $a_m = f(m)$ för något givet positivt heltal m. Då gäller att

$$a_{m+1} = f(1 + f^{-1}(a_m)) = f(1 + f^{-1}(f(m))) = f(1 + m),$$

där den sista likheten följer av definition av en invers funktion. Det som skulle visas följer nu av induktionsprincipen.

8. Vi behöver bara visa satsen för $a \in \{0, 1, 2, \ldots, pq-1\}$. Fallet $a = 0$ är trivialt så det fallet kan vi också undanta i fortsättningen.

   Den påstådda kongruensen gäller enligt Eulers sats för alla a som inte är en multipel av p eller q, så antag först att $a = kp$ för något heltal k. Observera att $1 \leq k \leq q-1$ varför k och q är relativt prima så att även kp och q är relativt prima. Eftersom $\Phi(pq) = \Phi(p)\Phi(q)$ och $(kp)^{\Phi(q)} = 1+rq$ för något heltal r enligt Eulers sats, gäller

   $$a^{1+\Phi(n)} = kp(kp)^{\Phi(p)\Phi(q)} = kp\big((kp)^{\Phi(q)}\big)^{\Phi(p)}$$
   $$= kp(1+rq)^{\Phi(p)}.$$

   Om man utvecklar det sista uttrycket kommer alla termer utom kp-termen att innehålla en faktor pq, varför hela uttrycket blir just kp modulo pq, som önskat. Fallen då a istället är en multipel av q behandlas analogt, med p och q i ombytta roller.