Matematik Chalmers

Tentamen till kurserna TMV200, TMV210, TMA245 (del A) och MAD100, den 16 augusti 2005, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Marcus Better, tel. 0739-779268

1. (6p) Lös den diofantiska ekvationen

$$45x + 50y = 25$$

fullständigt.

2. (6p) Vad blir $8^{20} + 13^{41}$ i $\mathbf{Z}_{25}$?

3. (6p) För vilket heltal x mellan 1000 och 2000 gäller att heltalsdivision av x med 9 ger resten 8, heltalsdivision av x med 11 ger resten 9, och heltalsdivision av x med 13 ger resten 10?

4. (6p) Visa att det för alla positiva heltal n gäller att

$$\sum_{k=0}^{n-1} (3k^2 + 3k + 1) = n^3.$$

5. (6p) Låt $G = (V, E)$ vara en graf och låt R, S och T vara relationer på V givna av att

   - xRy om x och y är grannar,
   - xSy om x och y ligger i samma sammanhängande komponent,
   - xTy om $d_x \leq d_y$.

   Vilka av relationerna R, S och T är ekvivalensrelationer?

6. (6p) För varje positivt heltal n, låt f_n vara antalet följder av längd n av nollor och ettor som ingenstans innehåller två ettor i rad. Visa att talen f_n bestäms av $f_1 = 2$, $f_2 = 3$ och för $n \geq 3$,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

7. (7p) Karin, Petter och Anna ska dela elva karameller mellan sig? På hur många sätt kan de fördela karamellerna? Hur många sätt blir det om man ställer som villkor ingen av dem ska bli helt utan karameller?

8. (7p) Bevisa Wilsons sats: Ett heltal $n \geq 2$ är ett primtal om och endast om $(n-1)! \equiv -1$ mod n.

/Johan Jonasson

Lösningar

1. Eftersom $sgd(45,50)|25$ är ekvationen lösbar. Efter förkortning med $sgd(45,50)$ får vi ekvationen

$$9x + 10y = 5.$$

Genom inspektion ser man snabbt att en lösning ges av $(x,y) = (-5,5)$ så den allmänna lösningen ges av $(x,y) = (-5-10n, 5+9n)$ där n kan vara vilket heltal som helst.

2. Eftersom $\Phi(25) = 5 \cdot 4 = 20$ gäller enligt Eulers sats att $a^{20} = 1$ i $\mathbf{Z}_{25}$ för alla a med $sgd(a,25) = 1$. Nu är ju både 8 och 13 relativt prima 25, så den första termen blir 1 och den andra termen blir $13 \cdot (13^{20})^2 = 13$ varför den sökta summan blir 14 i $\mathbf{Z}_{25}$.

3. Enligt uppgift uppfyller x de tre ekvationerna $x \equiv 8$ mod 9, $x \equiv 9$ mod 11 och $x \equiv 10$ mod 13. Enligt den första av dessa kan vi skriva $x = 8 + 9k$ för något heltal k. Genom att stoppa in detta i den andra ekvationen får vi att $8 + 9k = 9$ i $\mathbf{Z}_{11}$. Detta ger vid räkning i $\mathbf{Z}_{11}$ att $9k = 1$, dvs $k = 5$ i $\mathbf{Z}_{11}$, dvs $k = 5 + 9l$ för något heltal l.

Vi hade $x = 8+9k$ och eftersom $k = 5+9l$ får vi $x = 53+99l$. Nu sätter vi in detta i den tredje ekvationen och får $53+99l = 10$ i $\mathbf{Z}_{13}$, dvs $1+8l = 10$, dvs $8l = 9$ i $\mathbf{Z}_{13}$. Inversen till 8 i $\mathbf{Z}_{13}$ är 5 så $l = 5 \cdot 9 = 45 = 6$ i $\mathbf{Z}_{13}$, dvs $l = 6 + 13m$. Detta ger $x = 53 + 99(6 + 13m) = 647 + 1287m$ som allmän lösning och den speciella lösning som söks är den svarar mot $n = 1$, dvs $x = 1934$.

4. Använd induktion: För $n = 1$ säger formeln att $1 = 1$ vilket ju är sant. Om uttrycket är sant då $n = m$ där m är något godtyckligt uttryck, så gäller uttrycket även då $n = m + 1$, ty

$$\sum_{k=0}^{m}(3k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=0}^{m-1}(3k^2 + 3k + 1) + 3m^2 + 3m + 1$$

$$= m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m+1)^3$$

där den andra likheten följer av induktionsantagandet. Det vi ville visa följer nu av induktionsprincipen.

5. Relationen R är ingen ekvivalensrelation, ty den är inte transitiv: Att x är granne med y och y är granne med z garanterar ju inte att x och z är grannar.

   Inte heller T är en ekvivalensrelation, den är exempelvis inte symmetrisk, ty om till exempel $d_x = 1$ och $d_y = 2$ häller ju xTy men inte yTx.

   Relationen S är däremot en ekvivalensrelation: Varje nod är naturligtvis i samma komponent som sig själv, och om det finns en väg från x till y så finns det en väg från y till x. Transitivitet: Om det finns en väg från x till y och en väg från y till z så finns det en väg från x till z, nämligen en via y (och, naturligtvis, eventuellt andra vägar).

6. för $n = 1$ finns de två följderna 0 och 1 och för $n = 2$ finns 00, 01 och 10. För generallt n finns dels följderna som börjar på 0 (f_{n-1} stycken), dels de som börjar på 10 (f_{n-2} stycken). Totlat gäller alltså $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

7. Om man lägger ut de elva karamellerna i rad och fördelar dem genom att lägga ut två stickor som avdelare mellan Karins, Petters, respektive Annas högar, ser man att man har 13 föremål som ska positioneras. Man kan välja positioner till de två stickorna på $\binom{13}{2} = 78$ olika sätt. De kan alltså fördela karamellerna på 78 olika sätt.

   Med bivillkoret ska de två stickorna placers ut bland de 10 mellanrummen mellan karamellerna och de får inte placeras bägge i samma mellanrum. Antalet sätt blir alltså $\binom{10}{2} = 45$.

8. Antag först att n inte är ett primtal. Då finns ett heltal $m \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ sådant att $m|n$. Eftersom m finns med i produkten $(n-1)!$ gäller att $m|(n-1)!$. Om nu $(n-1)! \equiv -1 \bmod n$ gäller att $n|(n-1)! + 1$ och därmed att $m|(n-1)! + 1$. Detta ger att $m = 1$, en motsägelse.

   Antag nu att n är ett primtal. Tag $m \in \{2, 3, \ldots, n-2\}$. Då kan inte m vara sin egen invers in $\mathbf{Z}_n$, ty om så vore fallet skulle $n|m^2 - 1$ dvs $n|(m+1)(m-1$ och, eftersom n är ett primtal, $n|m-1$ eller $n|m+1$ så att $m = n-1$ eller $m = 1$. Således gäller vid räkning modulo n att varje produkt i $(n-1)!$ utom $n-1$ slås ut avsin invers, varför $(n-1)! \equiv n-1 \equiv 1$.