Diskret matematik IT ht 2004: Kryssuppgifter vecka 2

1. Låt $f : A \to B$ vara en funktion. För en delmängd C av A skriv f_C för *restriktionen* av f till C, dvs den funktion $f_C : C \to B$ som ges av

$$f_C(x) = f(x),\ x \in C.$$

   Antag nu att $A = A_1 \cup A_2$ Är följande påståenden sanna?

   (a) Om f_{A_1} och f_{A_2} är surjektiva så är f surjektiv.

   (b) Om f_{A_1} och f_{A_2} är injektiva så är f injektiv.

2. Funktionen $f : [1, 2] \to \mathbf{R}$ är given av

$$f(x) = 8x - 3x^2 + 1.$$

   Bestäm det längsta intervallet $I \subseteq [1, 2]$ sådant att restriktionen av f till I är injektiv. Ange också $f(I)$.

3. Låt A vara mängden av kvadratiska funktioner, dvs funktioner av typen $f(x) = ax^2+bx+c$ och låt R vara en relation på A given av att $a_1x^2 + b_1x + c_1\, R\, a_2x^2 + b_2x + c_2$ då $a_1 = a_2$ och $b_1 = b_2$.

   Visa att R är en ekvivalensrelation och beskriv ekvivalensklasserna geometriskt.

Lösningar

1. Utsagan (a) är sann, ty om f_{A_1} är surjektiv gäller att

$$f(A) \supseteq f(A_1) = f_{A_1}(A_1) = B.$$

   Däremot är inte (b) sann, låt till exempel $A = \mathbf{R}$, $A_1 = (-\infty, 0]$, $A_2 = [0, \infty)$ och $f(x) = x^2$.

2. Eftersom f är en andragradsfunktion med negativ x^2-koefficient vet vi att det finns en punkt a sådan att $f'(a) = 0$ och att f är strikt växande till vänster om a och strikt avtagande till höder om a. (Åtminstone om vi låtsas att f har hela reella linjen som definitionsmängd vilket egentligen inte är fallet här, men om det skulle visa sig att $a \notin [1, 2]$ är f själv injektiv.)

   Vi beräknar a: $f'(a) = -6x + 8 = 0$ ger att $a = 4/3 \in [1, 2]$. Det följer att det sökta intervallet är $I = [4/3, 2]$ (och restriktionen av f till I är strikt avtagande och därmed injektiv.)

3. Att R är reflexiv, dvs att det för alla a, b och c gäller att $ax^2 + bx + c \, R \, ax^2 + bx + c$, följer av att $a = a$ och $b = b$. Symmetrin följer av att om $ax^2 + bx + c \, R \, dx^2 + ex + f$ så gäller per definition av R att $a = d$ och $b = e$ varför $d = a$ och $e = b$ så att $dx^2 + ex + f \, R \, ax^+ bx + c$. Slutligen följer transitiviteten av att om $ax^2 + bx + c \, R \, dx^2 + ex + f$ och $dx^2 + ex + f \, R \, gx^2 + hx + i$ så gäller per definition av R att $a = d$, $d = g$, $b = e$ och $e = h$ varför $a = g$ och $b = h$ så att $ax^2 + bx + c \, R \, gx^2 + hx + i$.

   Ekvivalensklasserna beskrivs geometriskt av att två kvadratiska funktioner ligger i samma ekvivalensklass om båda har samma graf sånär som på att de ligger på olika höjd.