Diskret matematik IT ht 2004: Kryssuppgifter vecka 3

1. Låt F vara mängden av alla funktioner som har $A = \{1, 2, 3\}$ som definitionsmängd och $B = \{1, 2\}$ som målmängd.

   (a) Hur många element innehåller F? Skriv ner dem alla.

   (b) Definiera en relation R på F genom att låta fRg om $f(k) \leq g(k)$ för alla $k \in A$. Visa att R är en partiell ordning och ange om möjligt minsta och största element i F.

2. Visa att det för alla positiva heltal n gäller att

$$1 + 2\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^{n+1}.$$

3. Visa att det för alla heltal $n \geq 36$ gäller att det finns två positiva heltal m och k sådana att $n = 5m + 7k$.

Lösningar

1. Eftersom en funktion kan anta två olika värden för varje element i $\{1, 2, 3\}$ finns det $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ olika funktioner med aktuell målmängd och definitionsmängd. För att göra det bekvämt för oss kan vi skriva en funktion från $\{1, 2, 3\}$ till $\{1, 2\}$ som xyz där x, y och z alla är en etta eller en tvåa vi tolkar ”ordet” xyz som en funktion, f, med $f(1) = x$, $f(2) = y$ och $f(3) = z$. Då finns de åtta funktionerna 111, 112, 121, 211, 122, 212, 221 och 222. Funktionen 111 är minsta element och 222 är största element.

2. Vi ska visa att det för alla positiva n gäller att

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

   För $n = 1$ påstår denna formel att $1 + 3 = (9 - 1)/2$ vilket är sant. Om man nu, under antagandet att det för ett visst, godtyckligt valt, m gäller att formeln är sann då $n = m$, kan visa att formeln även gäller för $n = m + 1$ följer det önskade resultatet av induktionsprincipen. Vi prövar

$$\sum_{k=0}^{m+1} 3^k = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{m+1} = \frac{3^{m+1} - 1}{2} + 3^{m+1}$$

$$= \frac{3 \cdot 3^{m+1} - 1}{2} = \frac{3^{m+2} - 1}{2}$$

   som önskat. Saken är klar.

3. Påståendet i uppgiften är sant då $n = 36, 37, 38, 39$ eller 40, ty $36 = 5 \cdot 3 + 7 \cdot 3$, $37 = 5 \cdot 6 + 7 \cdot 1$, $38 = 5 \cdot 2 + 7 \cdot 4$, $39 = 5 \cdot 5 + 7 \cdot 2$ och $40 = 5 \cdot 1 + 7 \cdot 5$. För ett godtyckligt valt $n > 36$ antag att varje heltal i $\{36, 37, \ldots, n-1\}$ kan skrivas som en kombination av 5 och 7 på önskat sätt. Då gäller speciellt att det finns positiva heltal k och m så att $n - 5 = 5k + 7m$. Men då blir $n = 5(k+1) + 7m$ och det önskade resultatet följer av induktionsprincipen.