Diskret matematik IT ht 2004: Kryssuppgifter vecka 4

1. En algoritm som ofta används för att sortera listor i (t.ex. alfabetisk) ordning är den s.k. Quicksort-algoritmen, som tar en osorterad lista L och matar ut den sorterade listan $QS(L)$. Algoritmen definieras rekursivt på följande sätt:

   - Om L är tom eller innehåller endast ett element lämnas L oförändrad, dvs $QS(L) = L$.
   - Om L innehåller minst två element väljs en godtycklig post x och denna jämförs med alla andra poster, varvid dessa samlas i två grupper, A av poster som ska komma före x och B av poster som ska komma efter x. På de kortare listorna A och B tillämpas sedan QS. Med andra ord: $QS(L) = QS(A)\,x\,QS(B)$.

   Använd induktion till att visa att algoritmen fungerar. (Fundera gärna över hur många jämförelser som man kan förvänta sig totalt behöver göras om x alltid väljs på måfå.)

2. Låt talföljden $f_1, f_2, f_3, \ldots$ vara rekursivt definierad via startvärdena $f_1 = 2$ och $f_2 = 3$ och rekursionen

   $$f_n = \sqrt{8 + f_{n-1} + f_{n-2}}$$

   då $n \geq 3$.

   Visa att det för alla n gäller att $n < 4$.

3. Finn två heltal u och v sådana att $307u + 828v = 1$.

Lösningar

1. En lista med 0 eller 1 poster sorteras korrekt enligt den första punkten i specifikationen av algoritmen. Fixera nu n och antag att listor med 2,3,4,... eller $n-1$ sorteras korrekt och betrakta vad som då händer med en lista med n poster. Eftersom de båda dellistorna A och B har högst $n-1$ poster kommer bägge att sorteras korrekt. Enligt punkt 2 i specifikationen kommer hela listan att sorteras till $QS(A)xQS(B)$ och blir således också korrekt sorterad. Det följer nu av induktionsprincipen att algoritmen fungerar.

2. Påståendet som ska visas är uppenbarligen sant då $n = 1$ och då $n = 2$ per definition av f_1 och f_2. Betrakta nu ett godtyckligt positivt heltal $k \geq 3$ och antag att $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ alla är mindre än 4. Då gäller att

   $$f_k = \sqrt{8 + f_{k-1} + f_{k-2}} < \sqrt{8 + 4 + 4} = 4.$$

   Det följer nu av induktionsprincipen att $f_n < 4$ för alla n.

3. Detta är en direkt tillämpning av Euklides utökade algoritm.