Diskret matematik IT ht 2004: Kryssuppgifter vecka 5

1. Visa att det för alla udda heltal n gäller att $8|n^2-1$.
2. Till sitt födelsedagskalas köpte Kalle tablettaskar för 8 kronor styck, klubbor för 3 kronor styck och chokladkakor för 11 kronor styck. Han köpte sammanlagt 28 saker och betalade sammanlagt 172 kronor. Hur många av varje sort köpte han? (Obs. att det kan finnas flera olika lösningar.)
3. Finn de heltal x som är kongruenta med 37 modulo 91 och kongruenta med 31 modulo 47.

Lösningar

1. Låt n vara ett godtyckligt udda heltal. Eftersom n är udda finns det ett heltal k sådant att $n = 2k+1$. Enligt konjugatregeln gäller att $n^2-1 = (n+1)(n-1) = (2k+2)\cdot 2k = 4k(k+1)$. Om nu k är jämnt kan vi skriva $k = 2j$ för ett heltal j och får därmed att $n^2-1 = 8j(2j+1)$ och därmed att $8|n^2-1$. Om k istället är udda kan vi skriva $k = 2j-1$ för ett heltal j och får då $n^2-1 = 8j(2j-1)$ och även i detta fall gäller $8|n^2-1$. Saken är klar.
2. Låt x vara antalet tablettaskar, y antalet klubbor och z antalet chokladkakor som Kalle köpte. Då ger uppgiften oss de två ekvationerna

   $$8x+3y+11z = 172$$

   och

   $$x+y+z = 28.$$

   Den andra ekvationen talar om att $z = 28-x-y$ och genom att stoppa in detta i den första ekvationen följer att

   $$8x+3y+11(28-x-y) = 172$$

   dvs

   $$3x+8y = 136.$$

   Detta är en lösbar diofantisk ekvation. Eftersom $3\cdot 3+8\cdot(-1) = 1$ ges en lösning av $(x_0, y_0) = (136\cdot 3, 136\cdot(-1)) = (408, -136)$ så den allmänna lösningen blir $(x, y) = (408-8n, -136+3n)$ där n kan vara vilket heltal som helst. För z får vi $z = 28-x-y = 28-(408-8n)-(-136+3n) = -244+5n$. Nu gäller det att bestämma för vilka n som både x, y och z är positiva. I detta fall gäller detta då $n = 49$ eller $n = 50$. I det första fallet får vi $(x, y, z) = (16, 11, 1)$ och i det andra fallet får vi $(x, y, z) = (8, 14, 6)$. Kalle kan allatså ha köpt 16 tablettaskar, 11 klubbor och en chokladkaka eller så kan han ha köpt 8 tablettaskar, 14 klubboe och 6 chokladkakor.
3. Detta är en direkt tillämpning av kinesiska restsatsen.